

Departamento de Engenharia Mecânica
Mecânica dos Sólidos II



Cilindros de Paredes Grossas (Solução de Lamé)

Prof. Arthur Braga

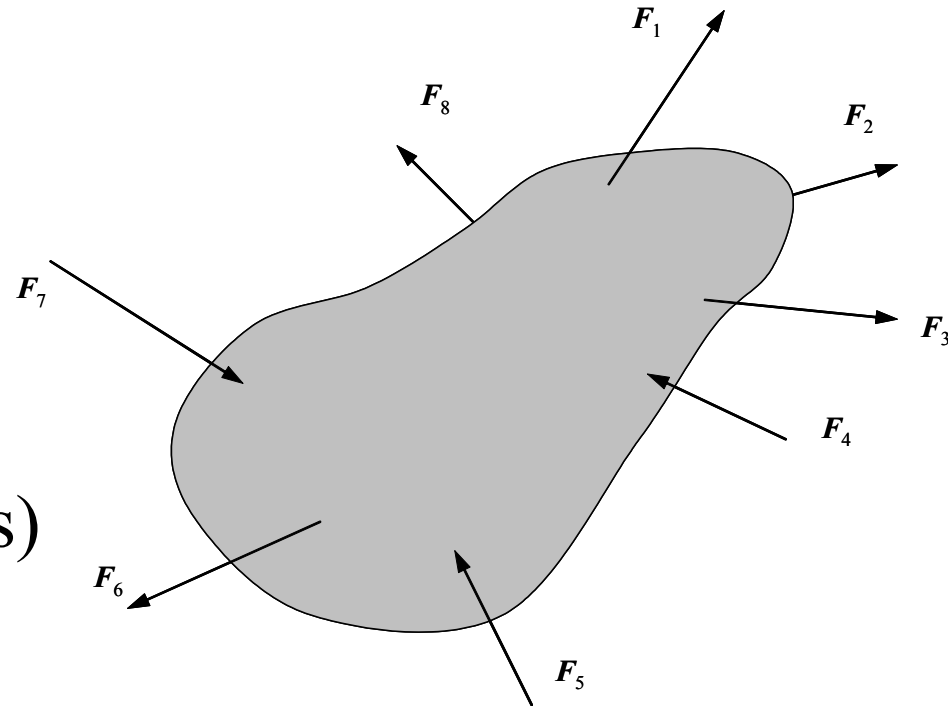
Teoria da Elasticidade

Problema

Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

Determinar

- Esforços internos (tensões)
- Deformações
- Deslocamentos



Teoria da Elasticidade

- Equações de Equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Teoria da Elasticidade

- Relações entre deslocamentos e deformações

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

Teoria da Elasticidade

- Relações constitutivas (tensão vs. deformação)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Teoria da Elasticidade

- 15 Equações
 - Equilíbrio (3)
 - Deformação *vs.* Deslocamentos (6)
 - Tensão *vs.* Deformação (6)

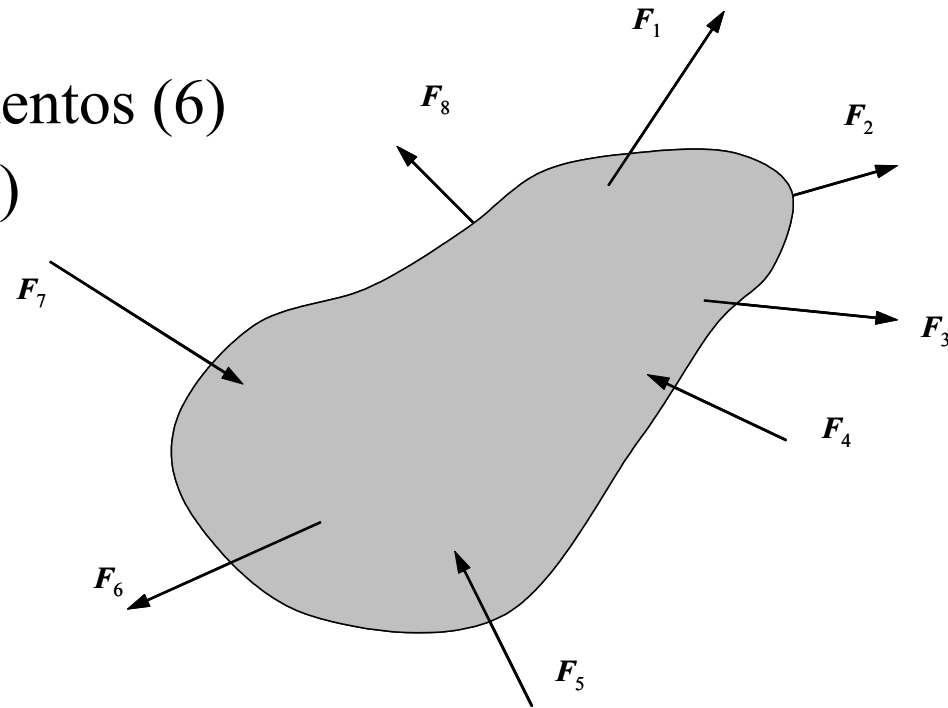
- 15 Variáveis:

$$u_x, u_y, u_z$$

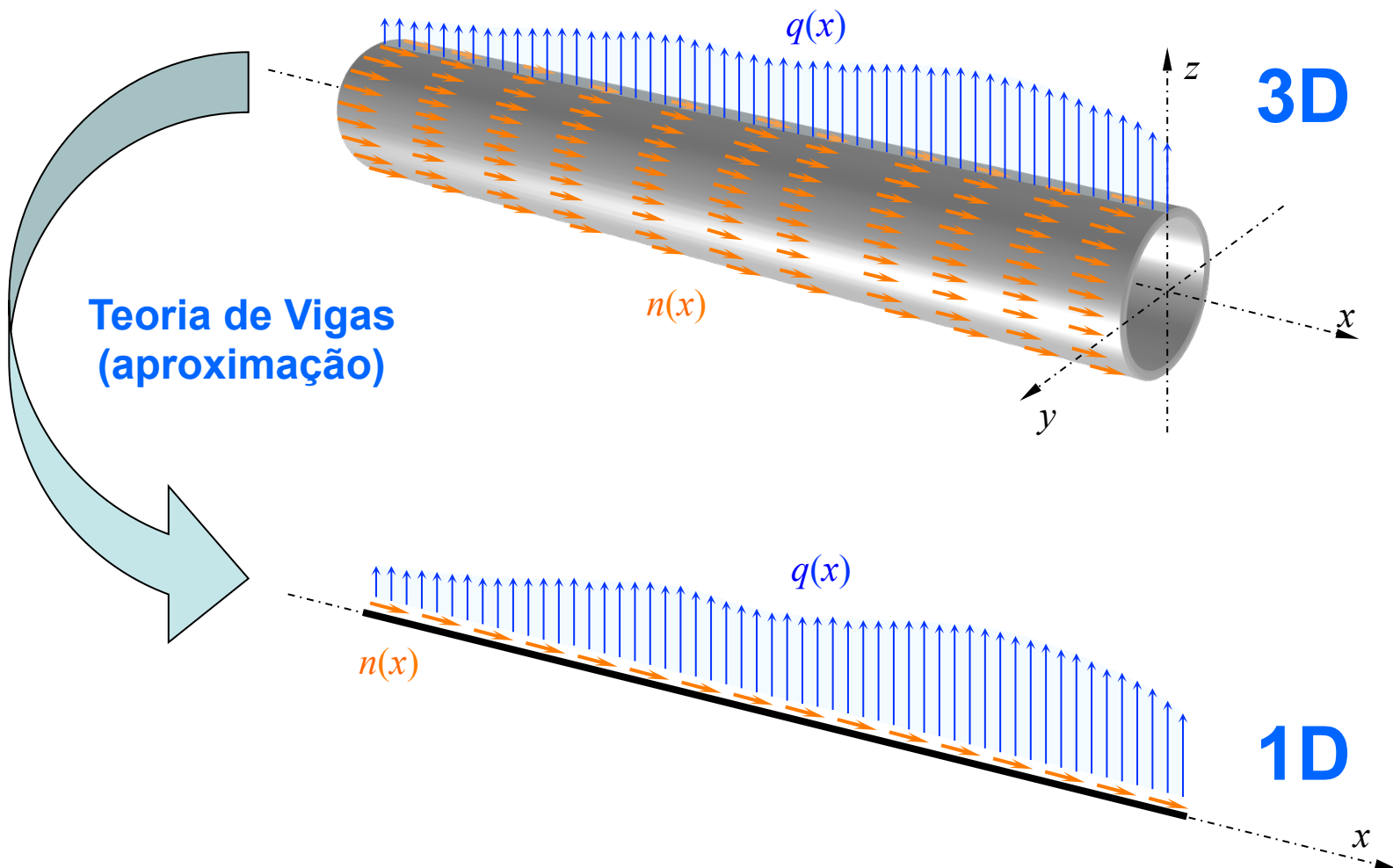
$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$$

$$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$$

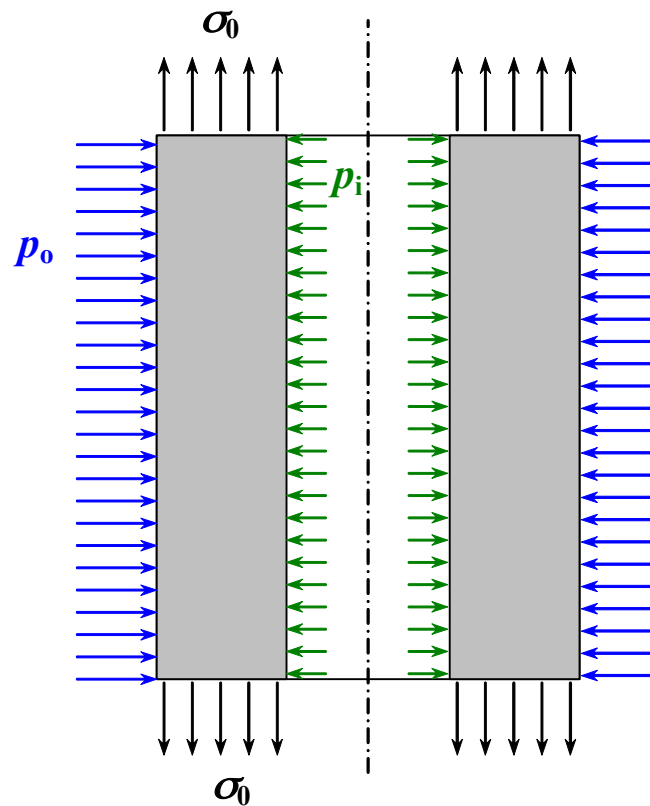
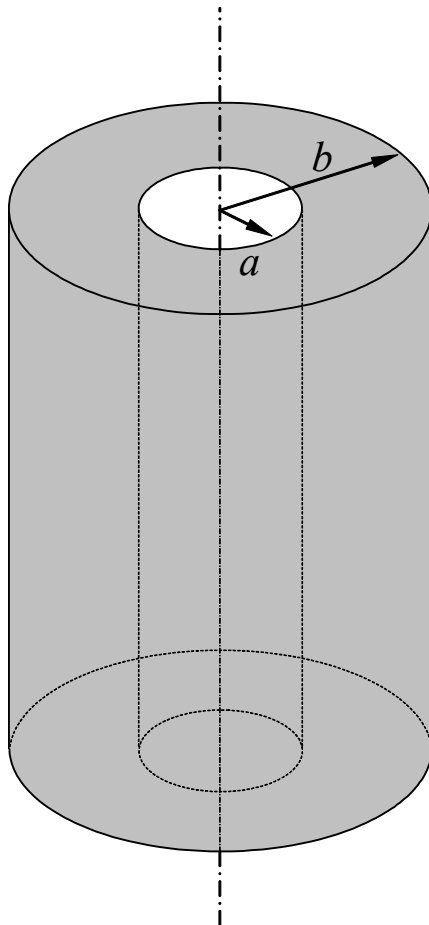
- Condições de contorno



Teoria de Vigas

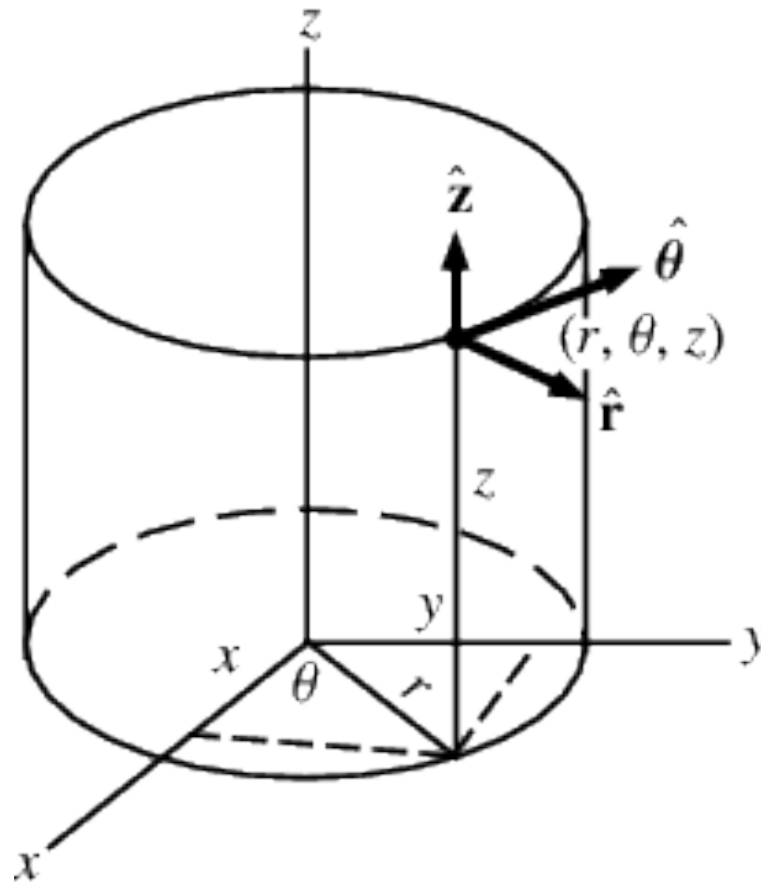


Cilindros de Paredes Grossas



Cilindros de Paredes Grossas

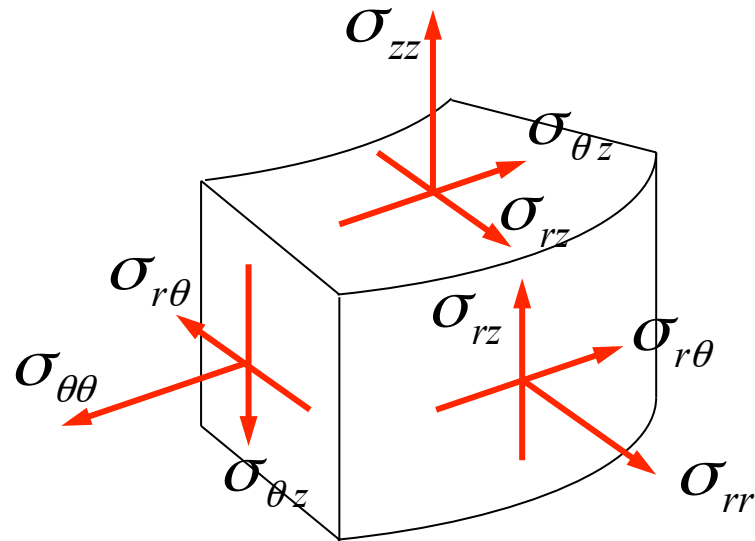
Coordenadas Cilíndricas



Cilindros de Paredes Grossas

Tensões em Coordenadas Cilíndricas

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Equilíbrio

Coordenadas Cilíndricas

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$

Relações Deslocamentos vs. Deformações

Coordenadas Cilindricas

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Relações Tensões vs. Deformações (Eq. Constitutivas)

Coordenadas Cilíndricas

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2G}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\nu \frac{\sigma_{rr}}{E} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

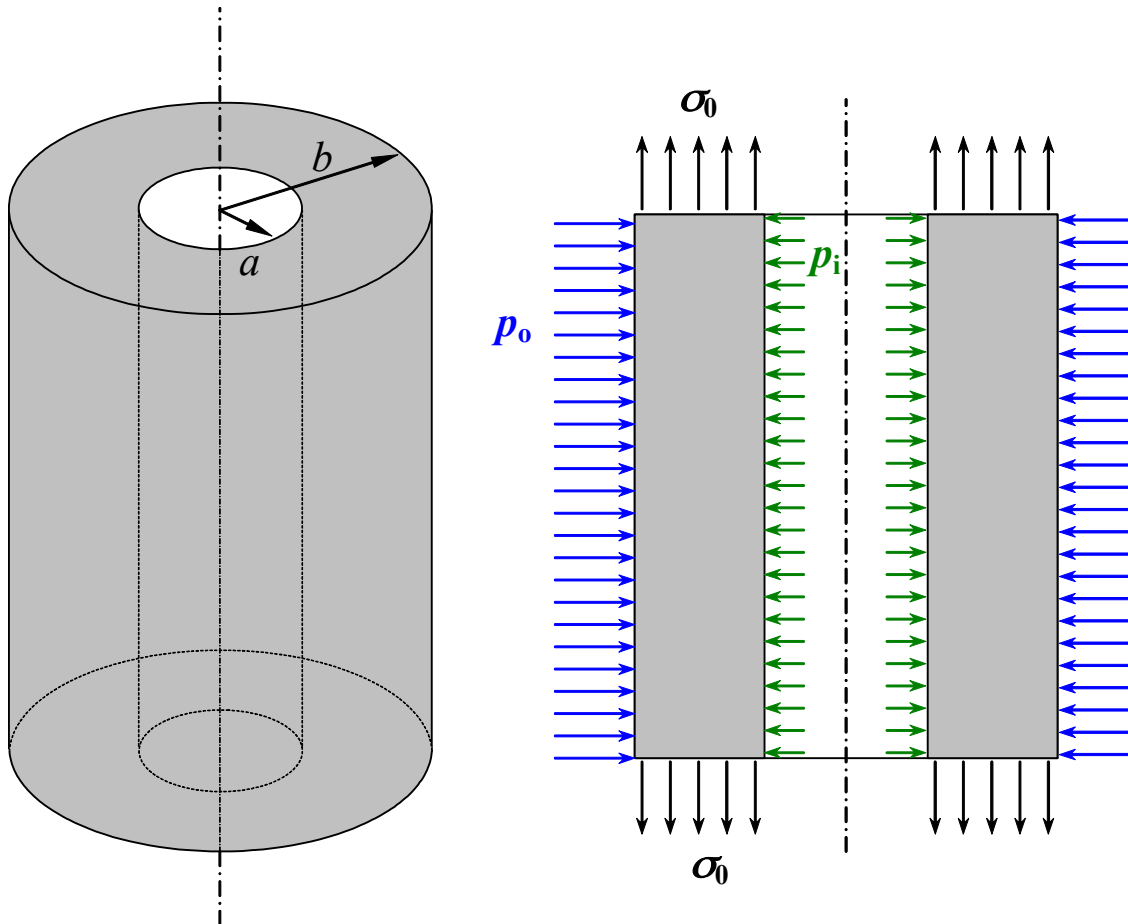
$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Cilindros de Paredes Grossas



Cilindros de Paredes Grossas

Simetria Axial (Problema Axissimétrico)

- Coordenadas cilíndricas
- Deslocamento circunferencial é nulo ($u_\theta = 0$)
- Tensões e deslocamentos não variam com θ
- Como o carregamento axial é uniforme ($\sigma_0 = \text{cte}$), tensões e o deslocamento radial não variam com a coordenada z (hipótese que pode ser posteriormente verificada). Além disso, adota-se a hipótese de que, devido ao carregamento uniforme axial, o deslocamento u_z varia apenas com a coordenada z .
- Estado plano de deformação: tensões e deformações axiais estão desacopladas das tensões e deformações no plano produzidas pela pressão interna ou externa

Cilindros de Paredes Grossas ($\sigma_0 = 0$)

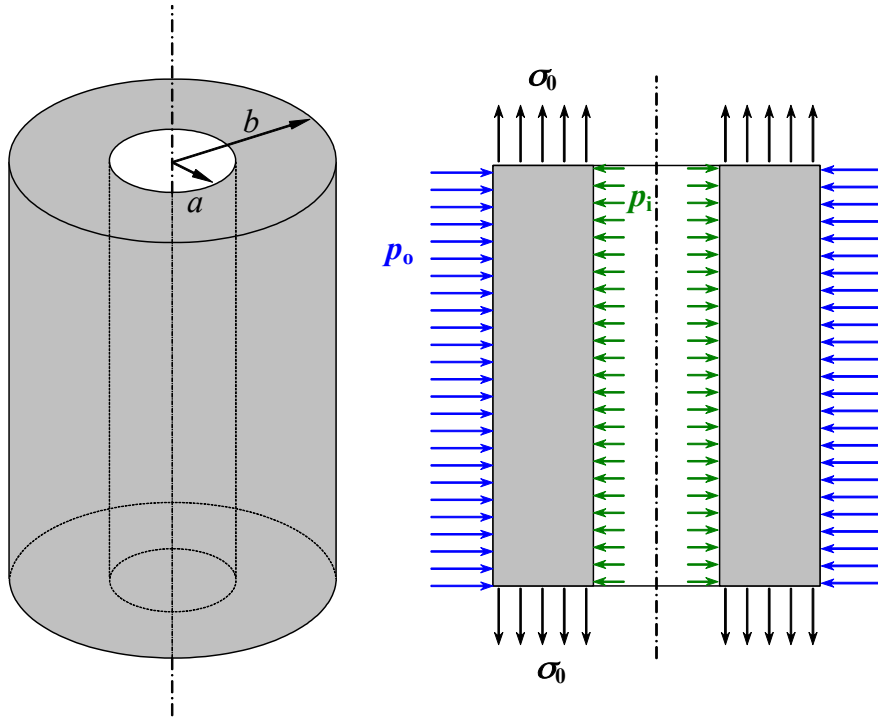
$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{du_r}{dr} & \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) & \sigma_{rr}(a) &= -p_i \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} & \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}) & \sigma_{rr}(b) &= -p_o\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_r(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé



$$\sigma_{rr} = -\left(\frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}\right) p_i - \left(\frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2}}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}\right) p_o$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left(\frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}\right) p_i - \left(\frac{\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2}}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}\right) p_o$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_0$$

$$u_r = \frac{1-\nu}{E} \frac{(p_i a^2 - p_o b^2)}{(b^2 - a^2)} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{(b^2 - a^2) r} - \frac{\nu r}{E} \sigma_0$$

Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé

- Pressão Interna ($p_o = 0$ e $p_i = P$)

$$\sigma_{rr} = -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} P \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} P$$

$$u_r = \left(\frac{1-\nu}{E} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r} \right) P - \frac{\nu r}{E} \sigma_0$$

Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé (pressão interna)

Definindo $X = \frac{D}{2t}$ e $\xi = \frac{r}{b} = \frac{2r}{D}$

temos:

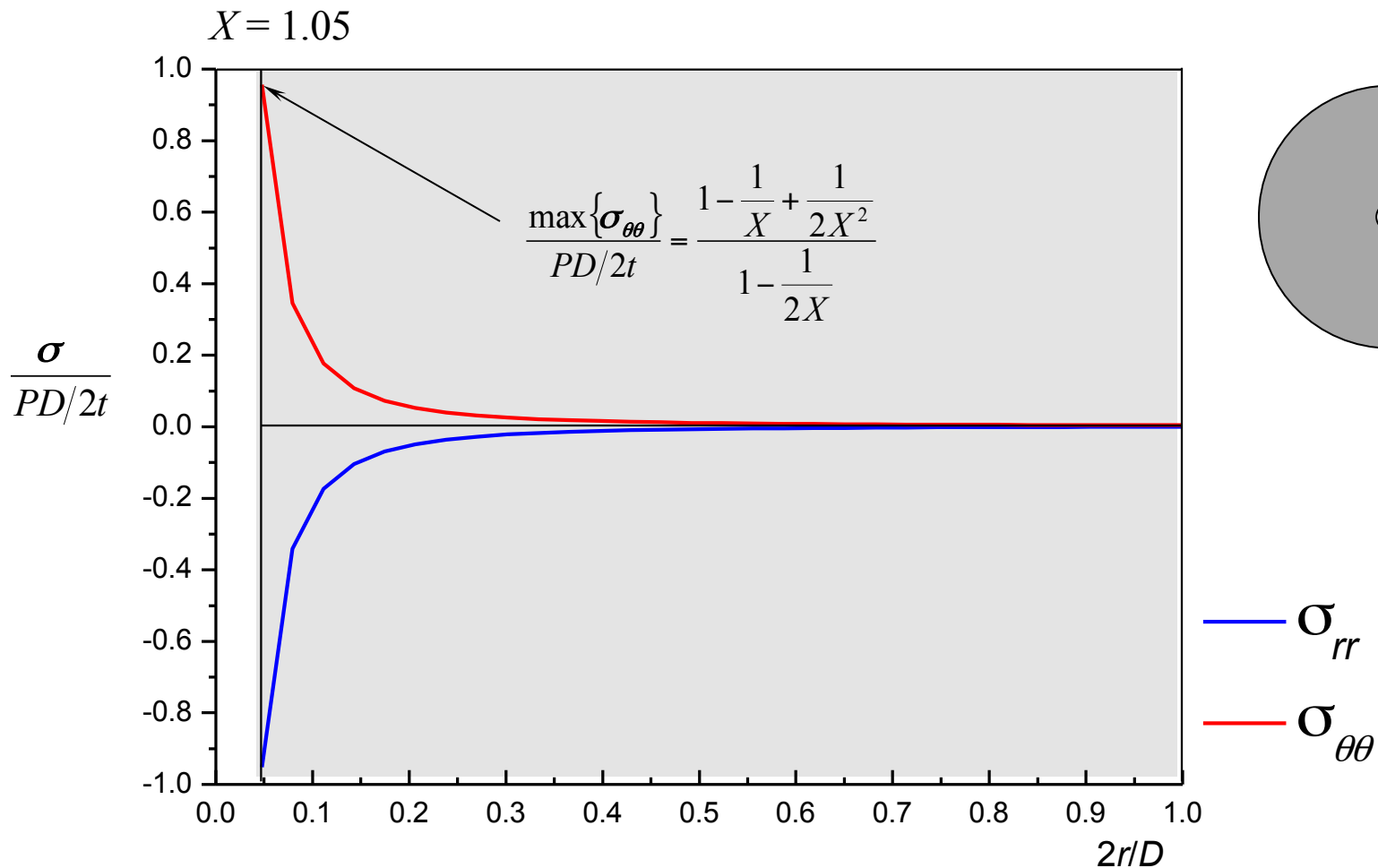
$$\frac{b}{a} = \frac{X}{X-1}, \quad r = a \Rightarrow \xi = \frac{X-1}{X} \quad \text{e} \quad r = b \Rightarrow \xi = 1$$

logo:

$$\frac{\sigma_{rr}}{PD/2t} = -\frac{(1-\xi^2)\left(1-\frac{2}{X}+\frac{1}{X^2}\right)}{2\xi^2\left(1-\frac{1}{2X}\right)} \quad \frac{\sigma_{\theta\theta}}{PD/2t} = \frac{(1+\xi^2)\left(1-\frac{2}{X}+\frac{1}{X^2}\right)}{2\xi^2\left(1-\frac{1}{2X}\right)}$$

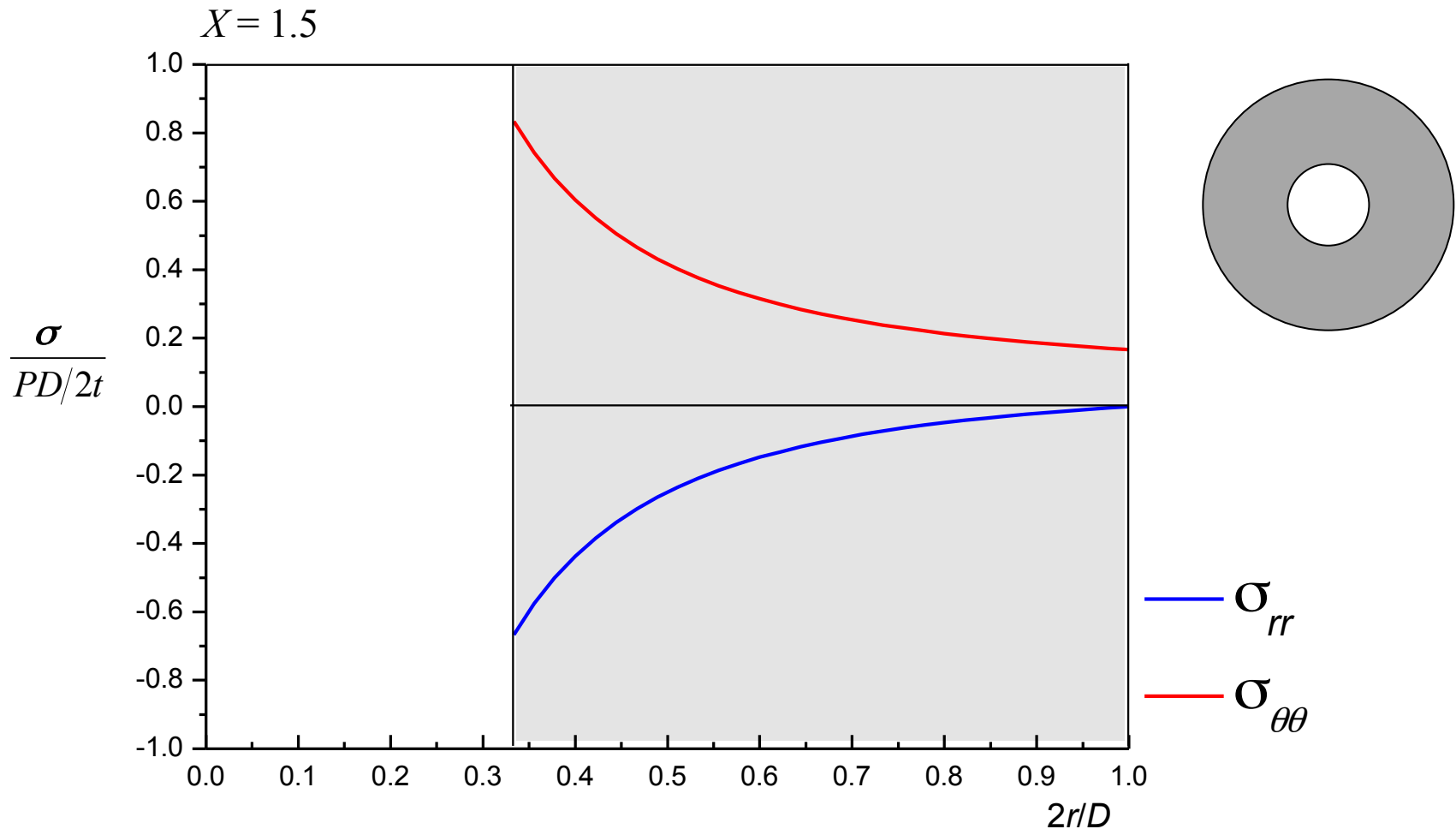
Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé



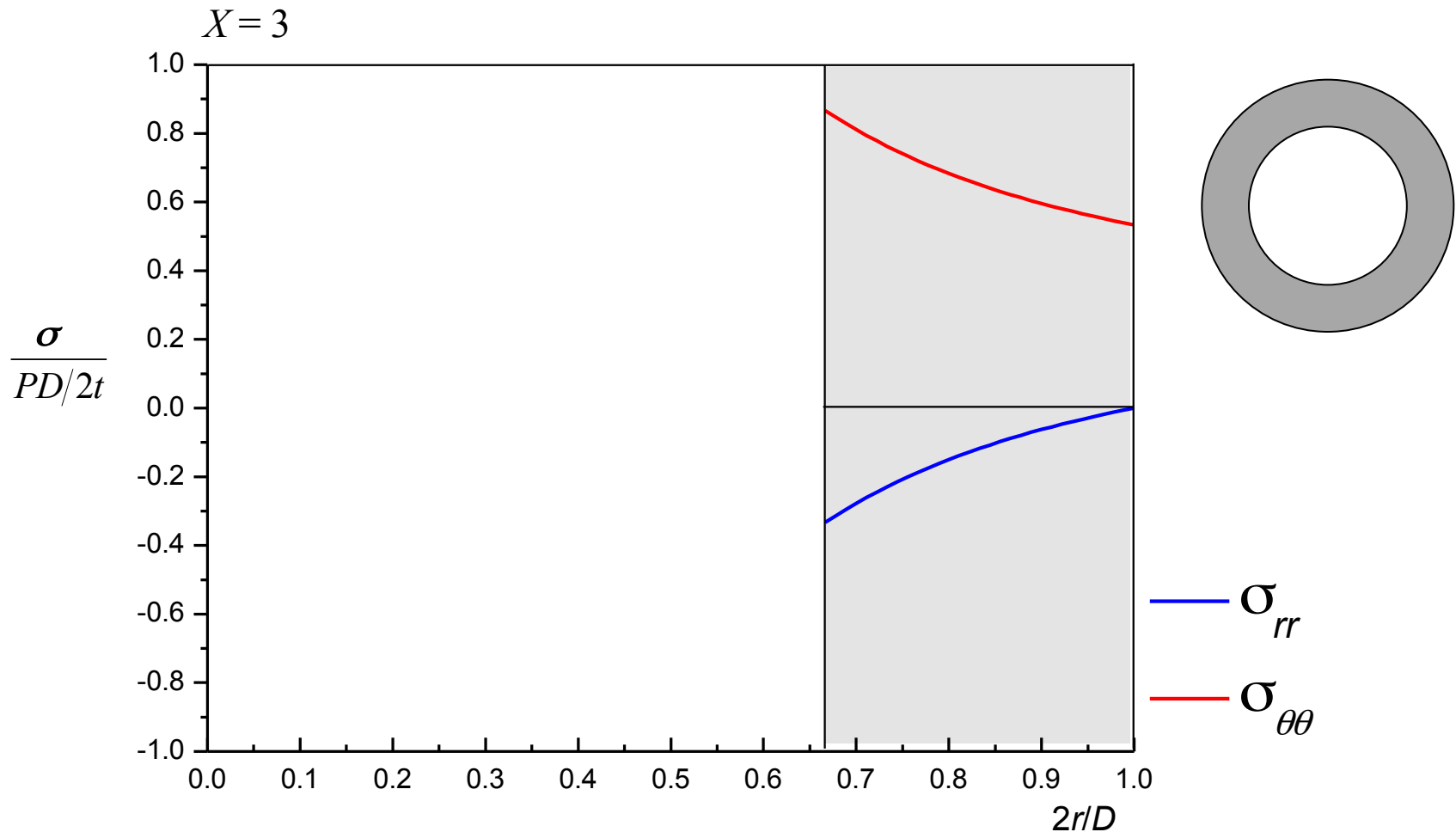
Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé



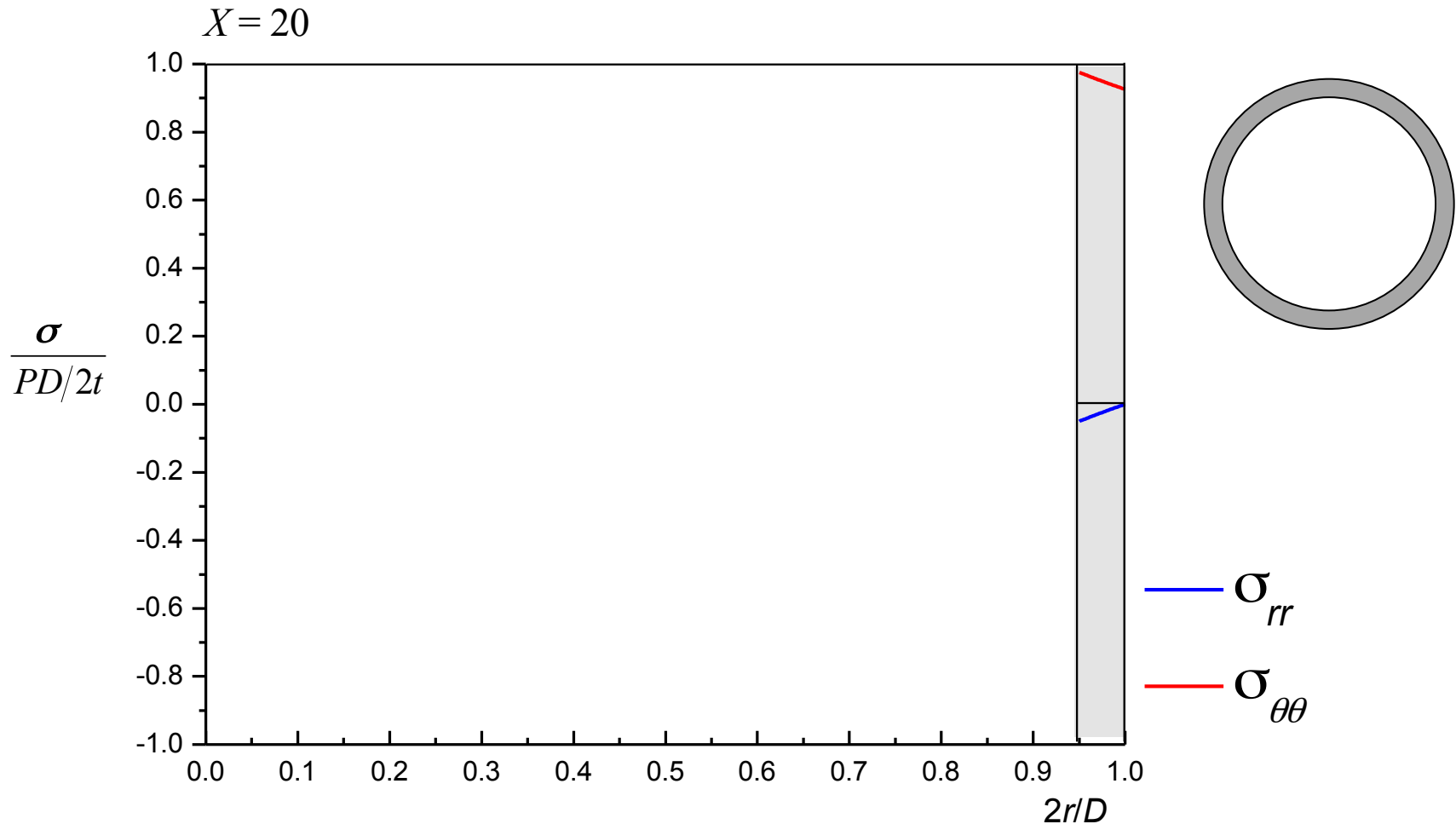
Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé



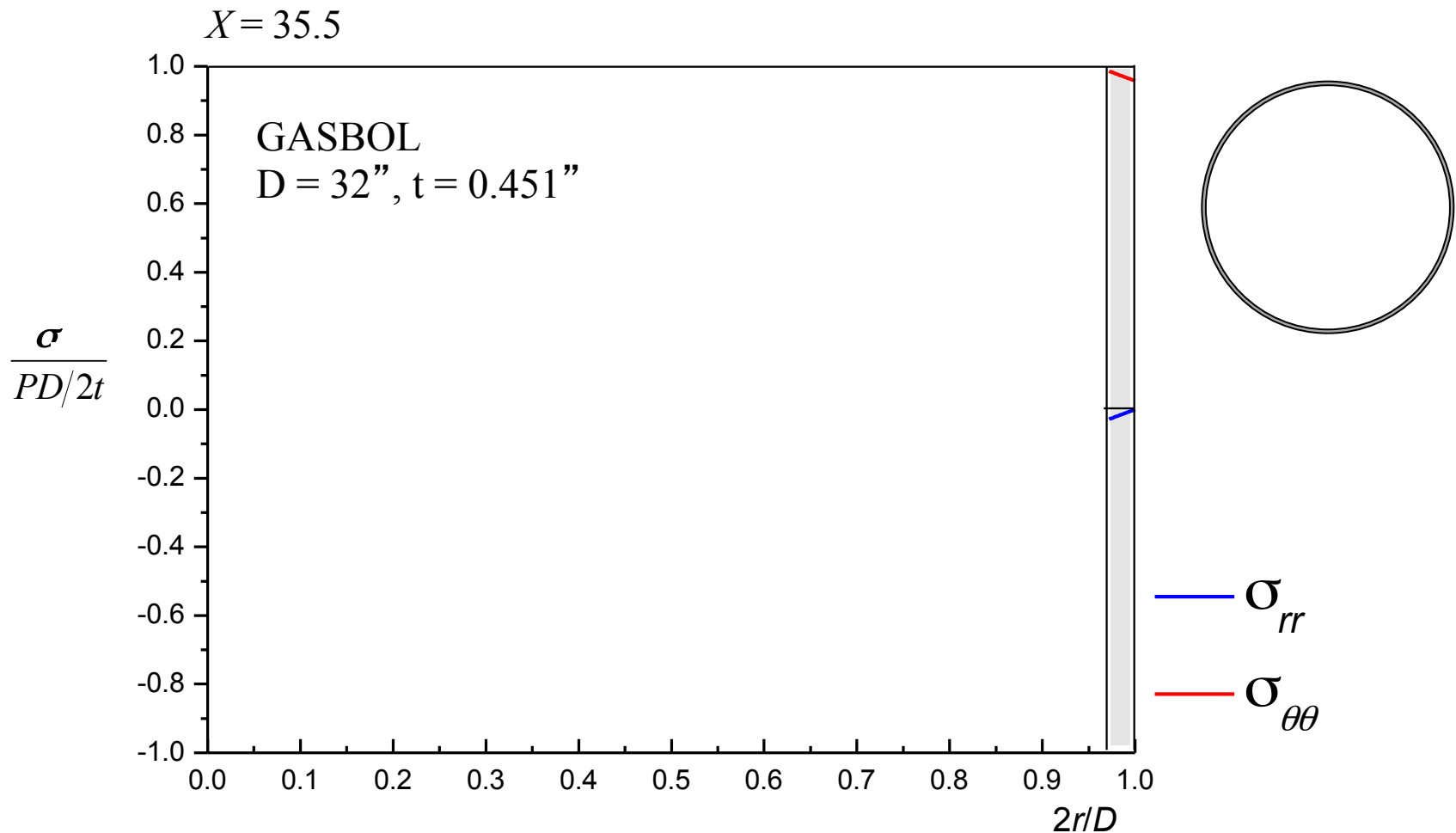
Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé



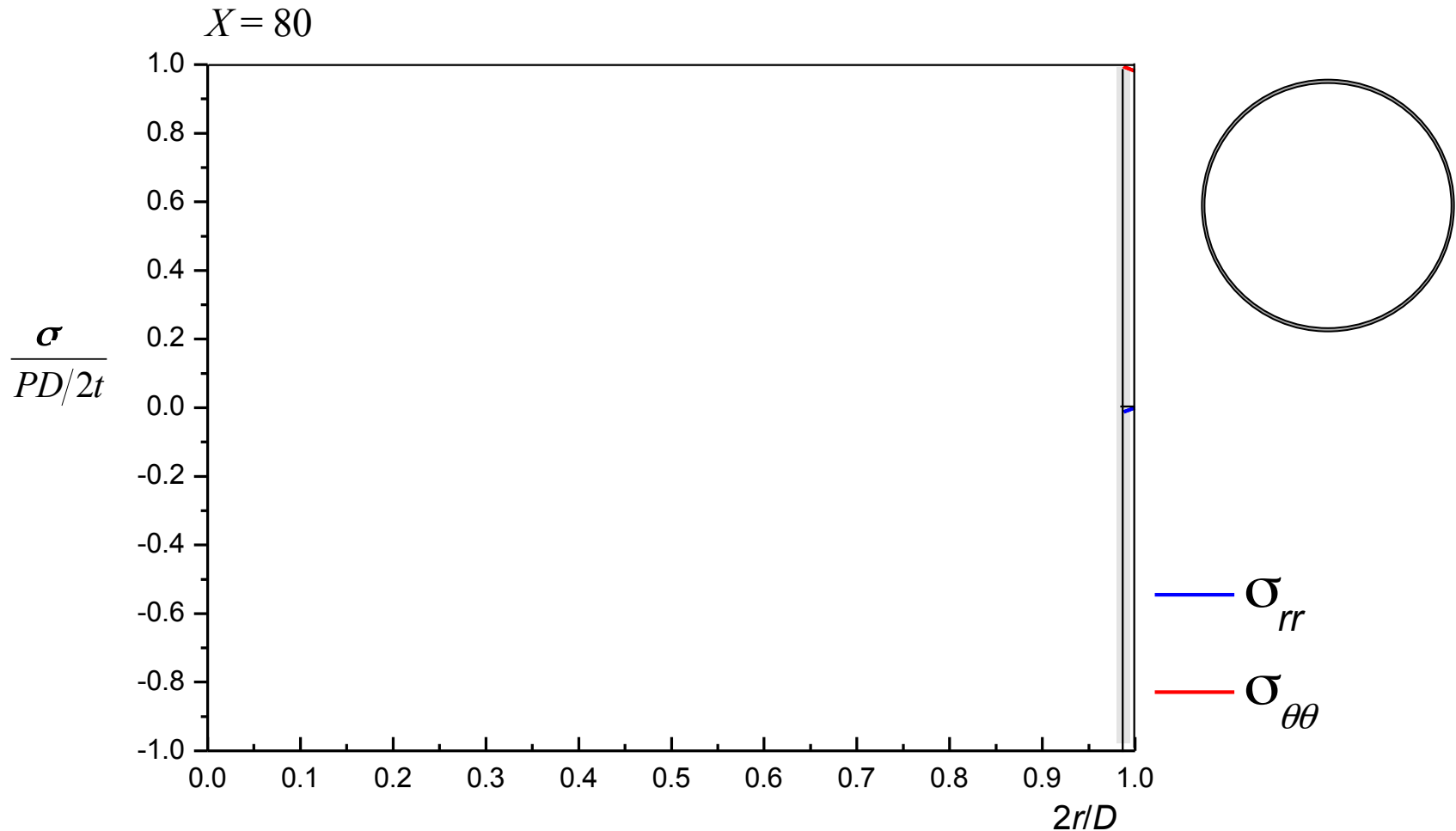
Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé



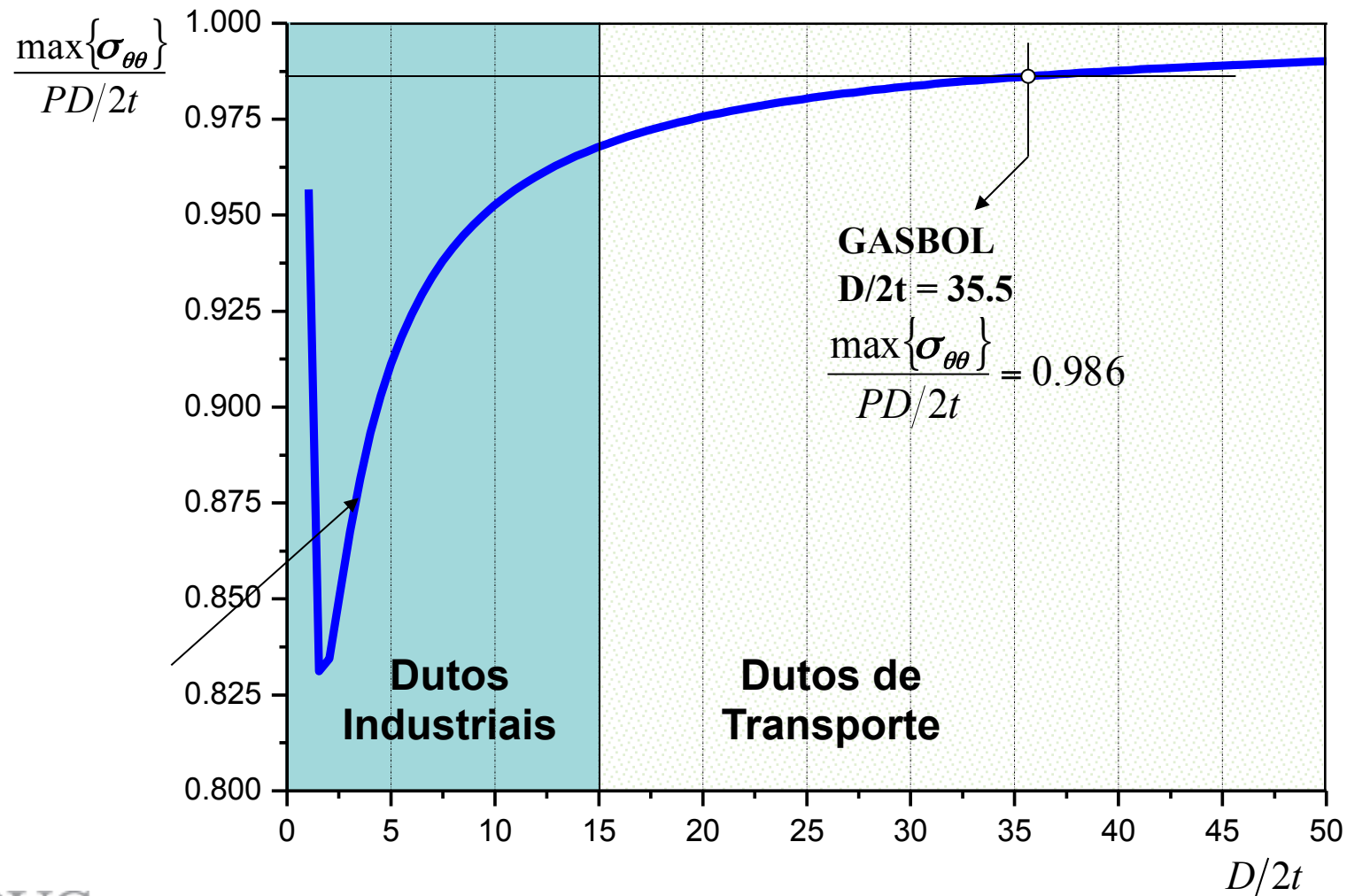
Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé

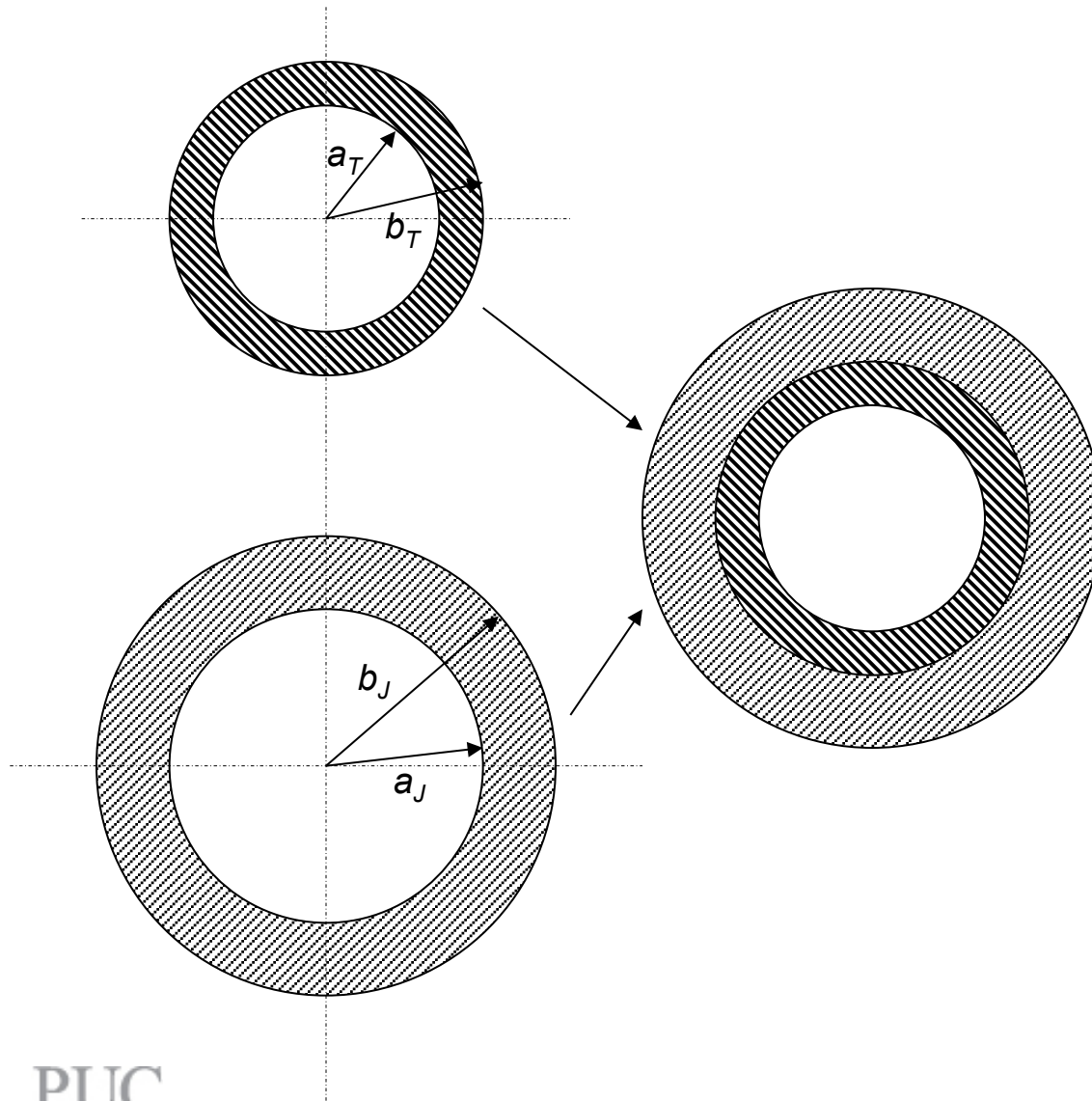


Cilindros de paredes grossas

Solução de Lamé



Problema 1



Na figura ao lado

$$a_T = 40 \text{ mm}$$

$$b_T = 60 \text{ mm}$$

$$b_J = 100 \text{ mm}$$

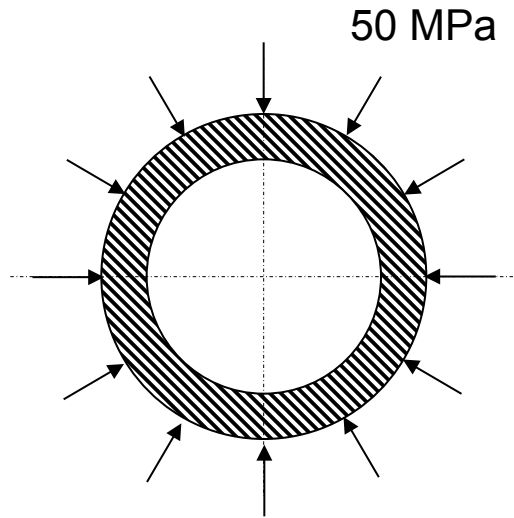
Determine o valor de a_J para que a tensão compressiva de contato entre o tubo e a jaqueta seja de -50 MPa .

Tanto o tubo quanto a jaqueta são fabricados do mesmo material com:

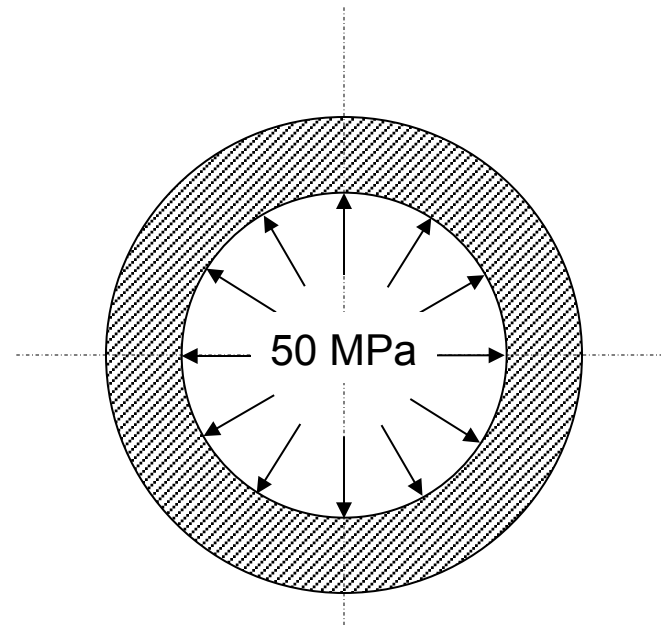
$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

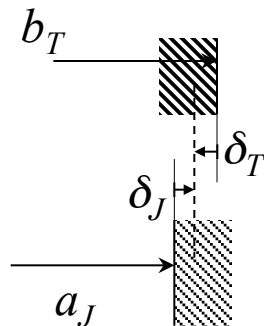
Problema 1 (Sol.)



Tubo



Jaqueta

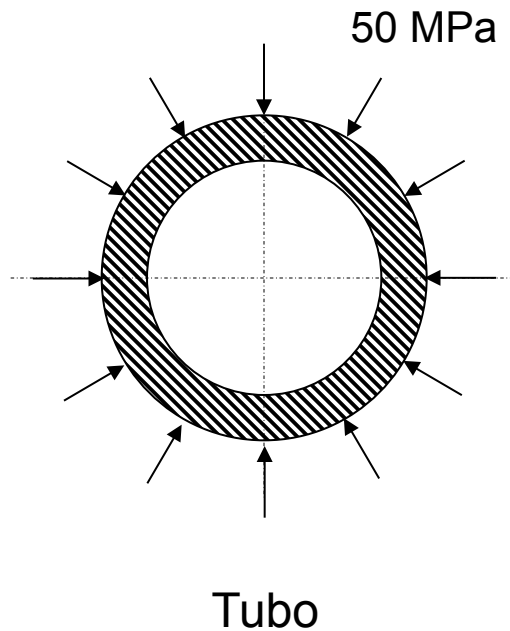


$$a_J + \delta_J = b_T - \delta_T$$

$$\delta_T = -u_r(b_T)$$

$$\delta_J = u_r(a_J)$$

Problema 1 (Sol.)

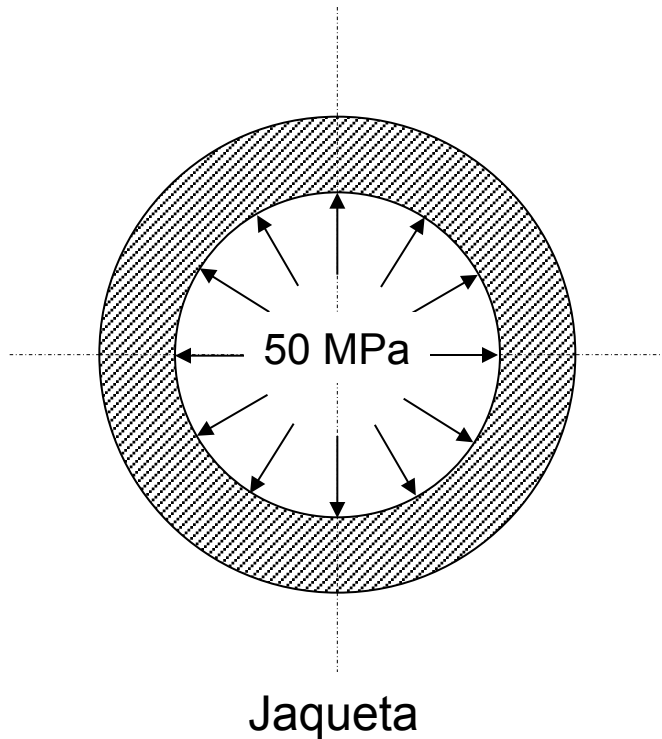


$$p_i = 0$$
$$p_o = P = 50 \text{ MPa}$$

$$u_r(b_T) = -\frac{Pb_T}{E(b_T^2 - a_T^2)} \left((1 - \nu)b_T^2 + (1 + \nu)a_T^2 \right)$$

$$\delta_T = \frac{Pb_T}{E(b_T^2 - a_T^2)} \left((1 - \nu)b_T^2 + (1 + \nu)a_T^2 \right)$$

Problema 1 (Sol.)



$$p_i = P = 50 \text{ MPa}$$

$$p_o = 0$$

$$u_r(a_J) = \frac{Pa_J}{E(b_J^2 - a_J^2)} \left((1 - \nu)a_J^2 + (1 + \nu)b_J^2 \right)$$

$$\delta_J = \frac{Pa_J}{E(b_J^2 - a_J^2)} \left((1 - \nu)a_J^2 + (1 + \nu)b_J^2 \right)$$

Problema 1 (Sol.)

O valor de a_J é obtido a partir da equação:

$$\begin{aligned} a_J + \frac{Pa_J}{E(b_J^2 - a_J^2)} \left((1 - \nu) a_J^2 + (1 + \nu) b_J^2 \right) \\ = b_T - \frac{Pb_T}{E(b_T^2 - a_T^2)} \left((1 - \nu) b_T^2 + (1 + \nu) a_T^2 \right) \end{aligned}$$

Problema 1 (Sol.)

$$a_J^0 = b_T$$

Repetir enquanto $a_J^{n+1} - a_J^n > \text{tolerância}$

$$a_J^{n+1} = b_T - \frac{Pb_T}{E(b_T^2 - a_T^2)} \left((1 - \nu)b_T^2 + (1 + \nu)a_T^2 \right) \\ - \frac{Pa_J^n}{E(b_J^2 - (a_J^n)^2)} \left((1 - \nu)(a_J^n)^2 + (1 + \nu)b_J^2 \right)$$

Após a segunda interação: $a_J = 59.93 \text{ mm}$

Problema 2

Na figura ao lado

$$a_T = 40.00 \text{ mm}$$

$$b_T = 60.00 \text{ mm}$$

$$a_J = 59.93 \text{ ,mm}$$

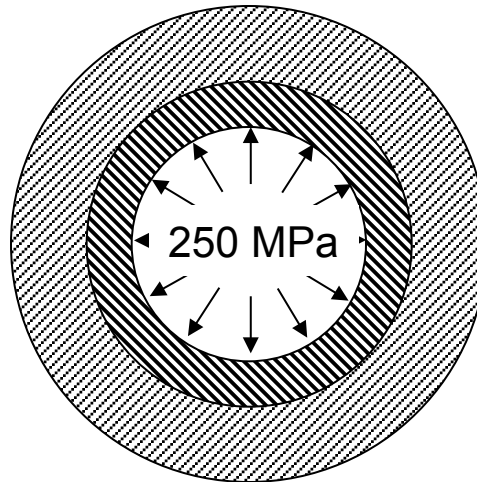
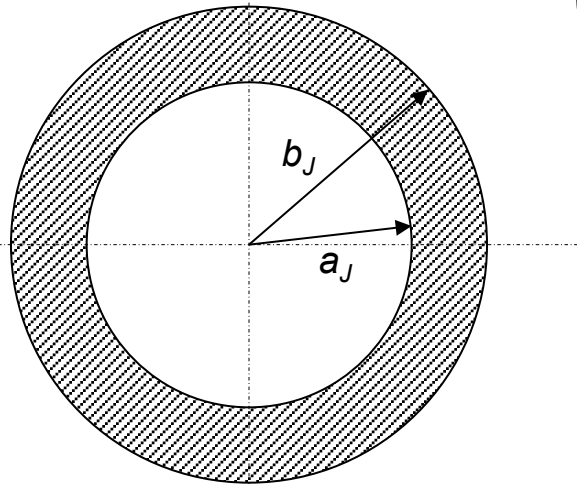
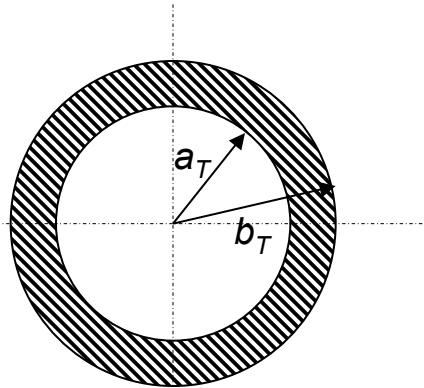
$$b_J = 100.00 \text{ mm}$$

Tanto o tubo quanto a
jaqueta são do mesmo
material com:

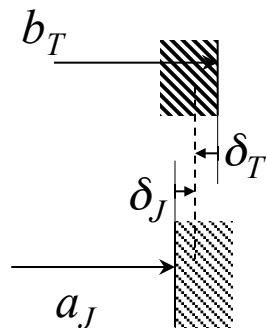
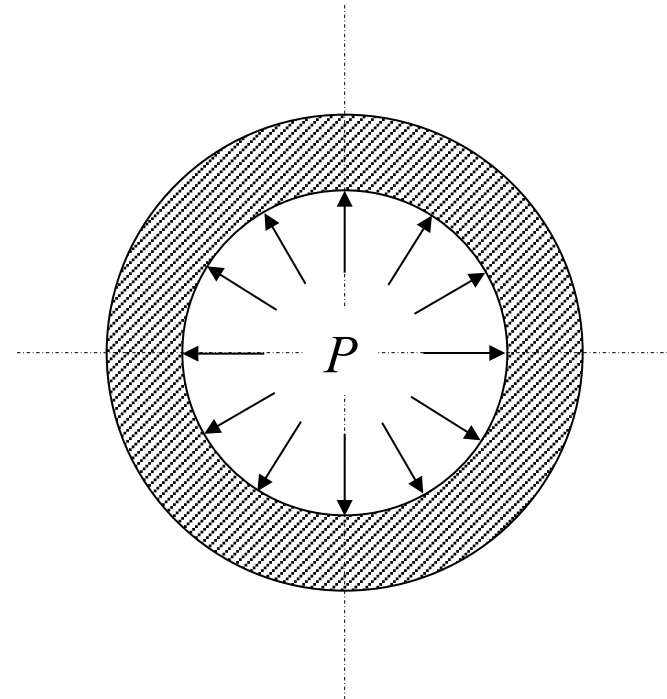
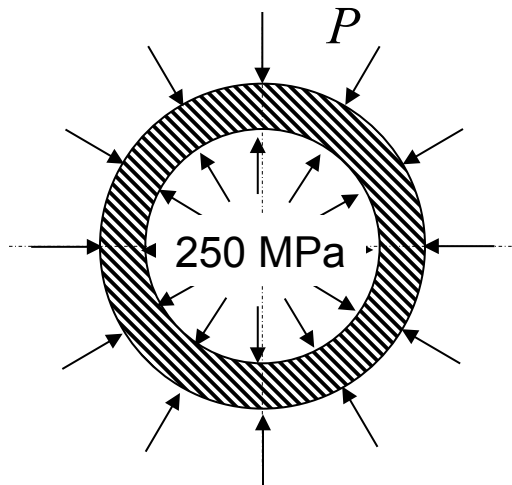
$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

Determine a máxima
tensão circunferencial



Problema 2 (Sol.)

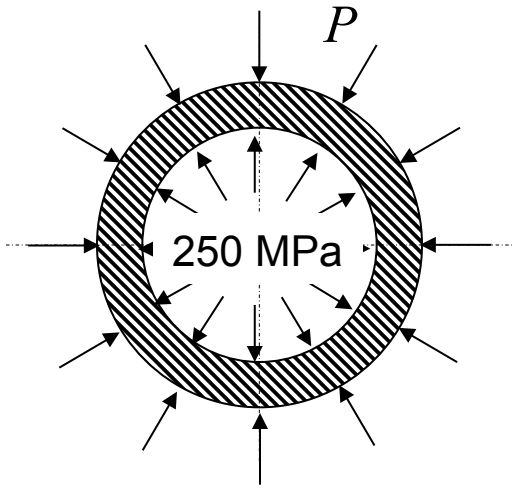


$$a_J + \delta_J = b_T - \delta_T$$

$$\delta_T = -u_r(b_T)$$

$$\delta_J = u_r(a_J)$$

Problema 2 (Sol.)

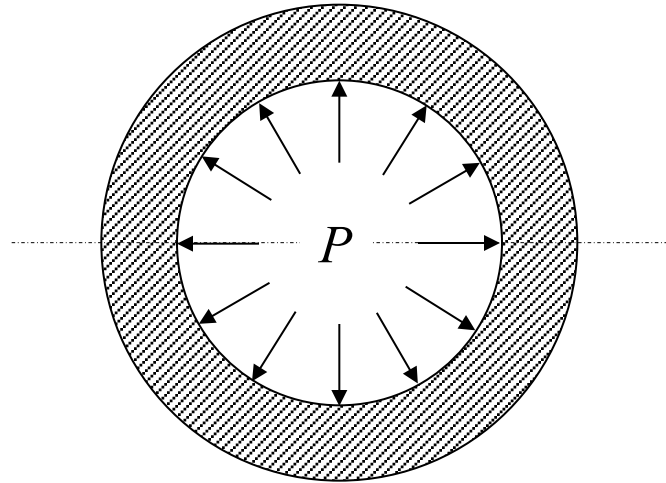


$$p_i = 250 \text{ MPa}$$

$$p_o = P$$

$$\delta_T = -u_r(b_T) = -\frac{2a_T^2 b_T}{E(b_T^2 - a_T^2)} p_i + \frac{((1 - \nu)b_T^2 + (1 + \nu)a_T^2)b_T}{E(b_T^2 - a_T^2)} P$$

Problema 2 (Sol.)



$$p_i = P$$

$$p_o = 0$$

$$\delta_J = u_r(a_J) = \frac{Pa_J}{E(b_J^2 - a_J^2)} \left((1 - \nu)a_J^2 + (1 + \nu)b_J^2 \right)$$

Problema 2 (Sol.)

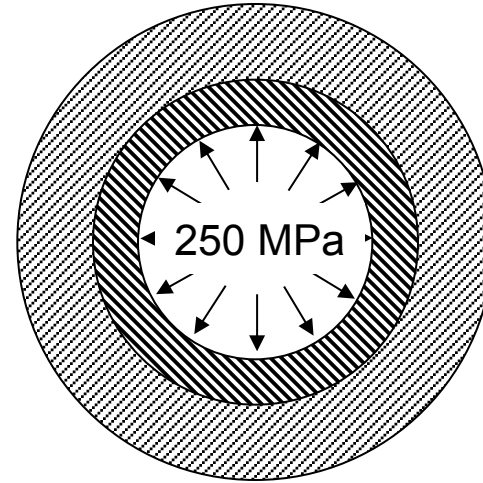
$$a_J + \frac{Pa_J}{E(b_J^2 - a_J^2)} \left((1 - \nu)a_J^2 + (1 + \nu)b_J^2 \right) \\ = b_T + \frac{2a_T^2 b_T p_i}{E(b_T^2 - a_T^2)} - \frac{Pb_T}{E(b_T^2 - a_T^2)} \left((1 - \nu)b_T^2 + (1 + \nu)a_T^2 \right)$$

Resolvendo para P

$$P = \frac{b_T + \frac{2a_T^2 b_T p_i}{E(b_T^2 - a_T^2)} - a_J}{\frac{a_J \left((1 - \nu)a_J^2 + (1 + \nu)b_J^2 \right)}{E(b_J^2 - a_J^2)} + \frac{b_T \left((1 - \nu)b_T^2 + (1 + \nu)a_T^2 \right)}{E(b_T^2 - a_T^2)}} = 134.24 \text{ MPa}$$

Problema 2 (Sol.)

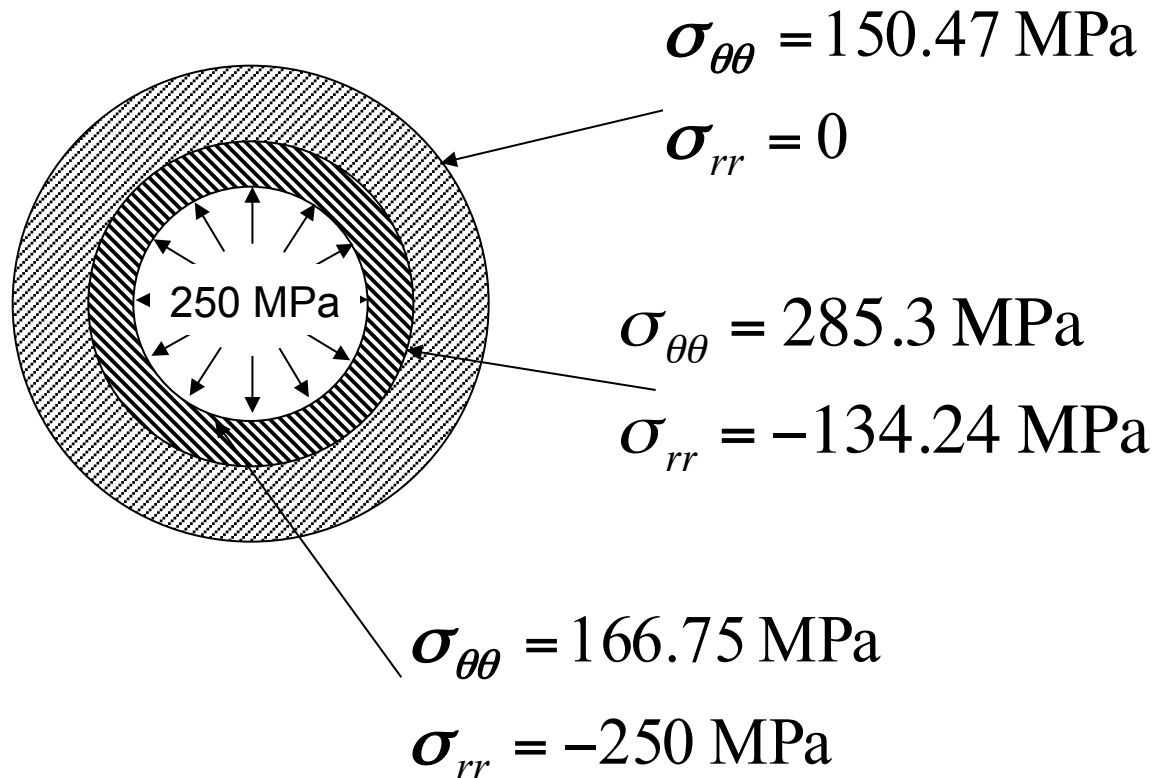
**Tensão circunferencial
máxima no tubo jaquetado**



$$\max\{\sigma_{\theta\theta}\} = \sigma_{\theta\theta}(a_T) = \frac{\left(b_T^2/a_T^2 + 1\right)}{\left(b_T^2/a_T^2 - 1\right)} p_i - 2 \frac{b_T^2/a_T^2}{\left(b_T^2/a_T^2 - 1\right)} P$$

$$\boxed{\max\{\sigma_{\theta\theta}\} = 166.75 \text{ MPa}}$$

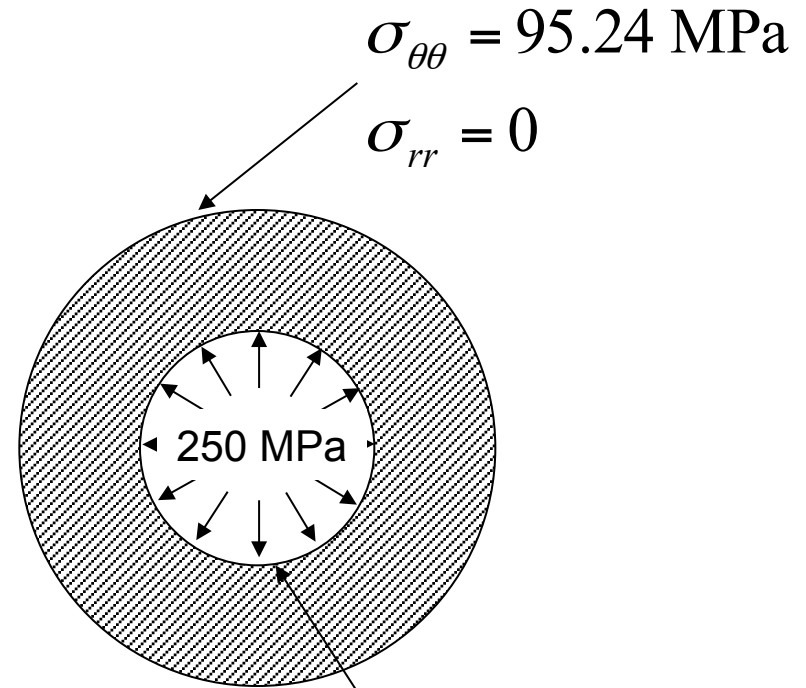
Problema 2 (Sol.)



Problema 2 (Sol.)

Tubo Homogêneo

Tensão circunferencial máxima num tubo sem a jaqueta (raio interno a_T e raio externo b_J)

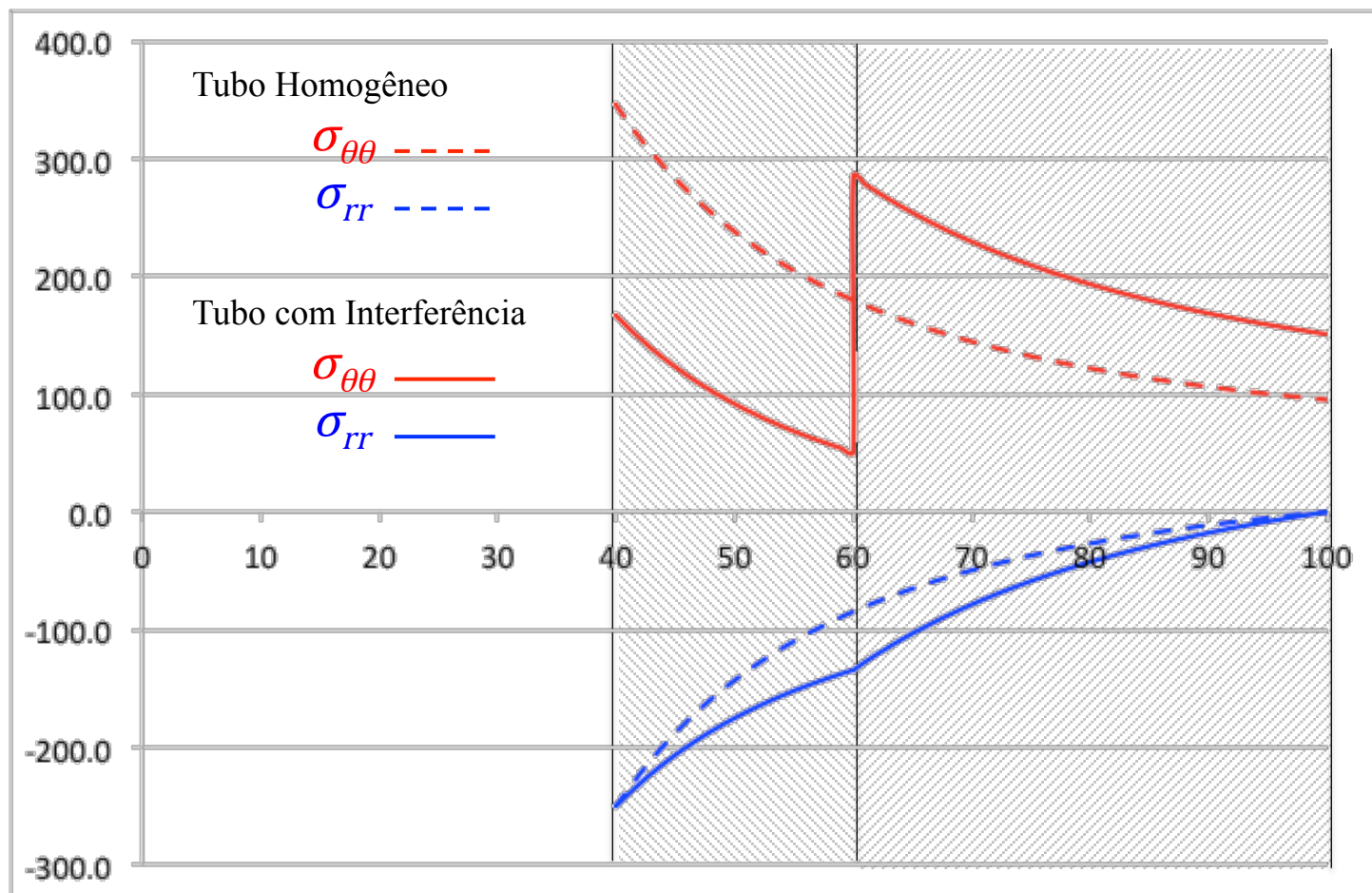


$$\max\{\sigma_{\theta\theta}\} = \sigma_{\theta\theta}(a_T) = \left(\frac{b_J^2/a_T^2 + 1}{b_J^2/a_T^2 - 1} \right) p_i$$

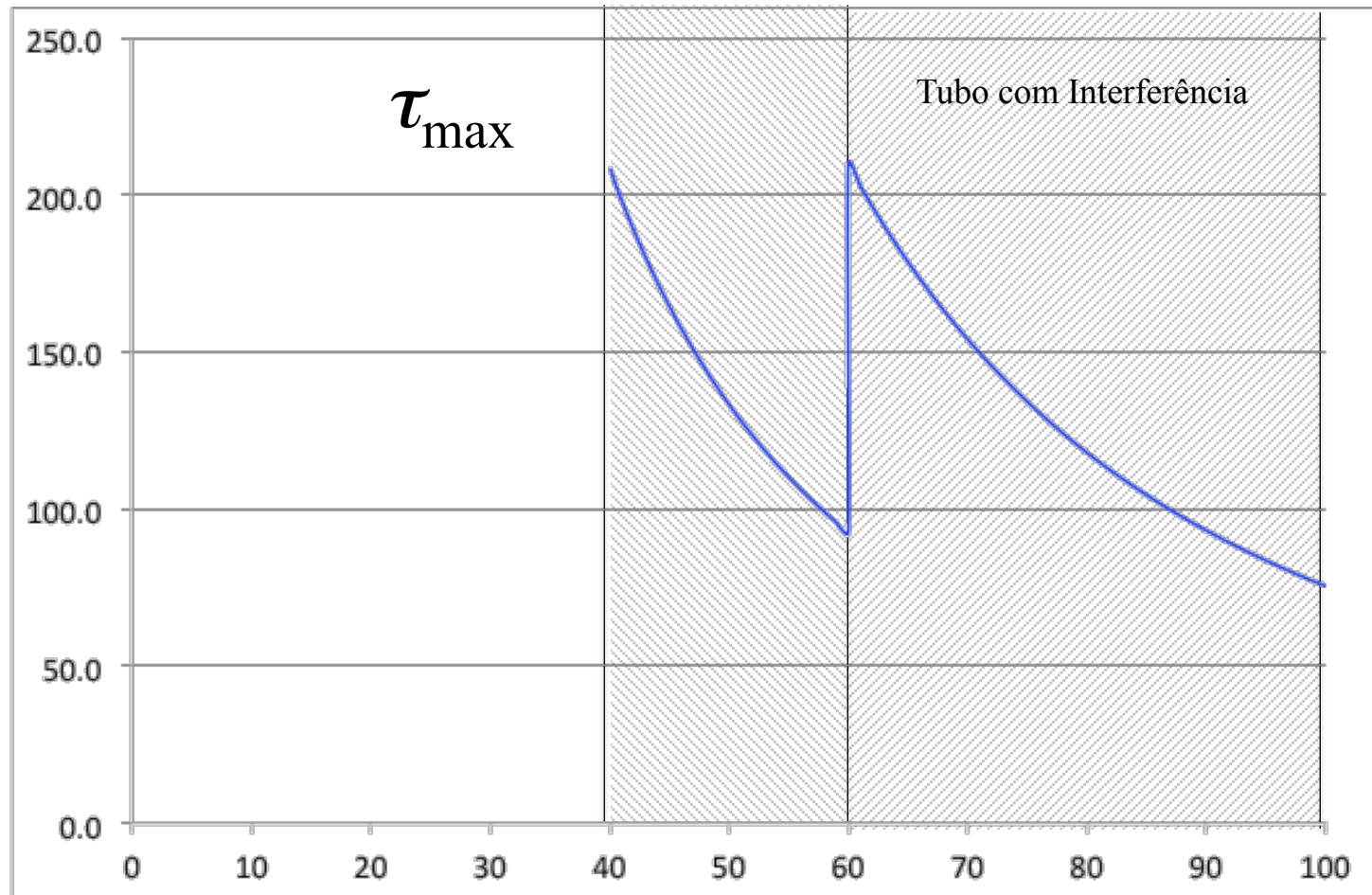
$\sigma_{\theta\theta} = 345.24 \text{ MPa}$
 $\sigma_{rr} = -250 \text{ MPa}$

$$\boxed{\max\{\sigma_{\theta\theta}\} = 345.24 \text{ MPa}}$$

Problema 2 (Sol.)

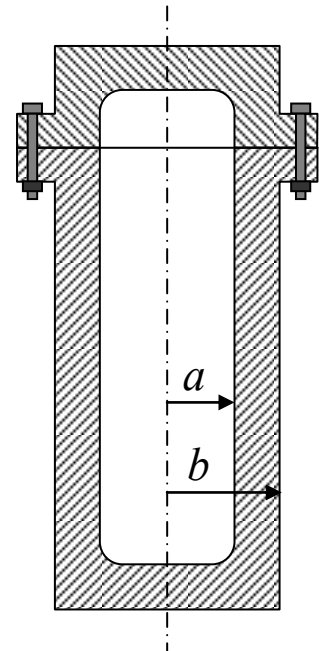


Problema 2 (Sol.)



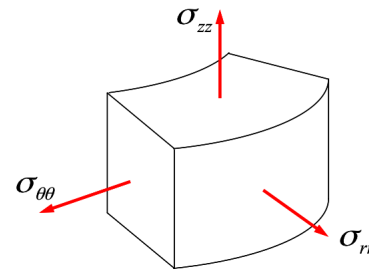
Exercício 1: P1 2008

Problema 2. O vaso de pressão cilíndrico esquematicamente mostrado na figura ao lado, cujo material tem limite de escoamento de 350 MPa, foi dimensionado para operar a uma pressão interna máxima de 5.000 psi (34,5 MPa). Seu raio externo, b , mede 90,5 mm e seu raio interno, a , mede 41,3 mm. Calcule as tensões normais radial, circunferencial e axial máximas quando o vaso está sob a pressão máxima de operação. Considerando os critérios de escoamento de von Mises e Tresca, determine os respectivos fatores de segurança de operação (3,0 pontos).



Exercício 1 (cont.)

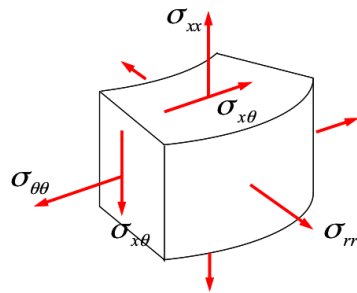
Tensão	Parede Interna do Tubo	
σ_1	$\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} = \frac{(b^2/a^2 + 1)}{(b^2/a^2 - 1)} P = 52,6 \text{ MPa}$	
σ_2	$\sigma_2 = \sigma_{zz} = \frac{1}{(b^2/a^2 - 1)} P = 9,1 \text{ MPa}$	
σ_3	$\sigma_3 = \sigma_{rr} = -P = -34,5 \text{ MPa}$	
$\tau_{\max}$	$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 43,6 \text{ MPa}$	
σ_{VM}	$\sigma_{VM} = 75,5 \text{ MPa}$	
FS	Tresca	$F_{VM} = S_Y / \sigma_{VM} = 4,64$
	Von Mises	$F_T = S_Y / 2\tau_{\max} = 4,02$



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Exercício 2: P1 2012

Problema 2. Um tubo fechado em suas duas extremidades encontra-se submetido a uma pressão interna de 4.000 psi (27,6 MPa) enquanto simultaneamente sofre a ação de um torque de 1,6 N · m. O diâmetro interno e a espessura do tubo são, respectivamente, 1/4" (6.35 mm) e 0,0305" (0,775 mm). O limite de escoamento do material do tubo, S_Y , é de 290 MPa. Determine os fatores de segurança contra o escoamento considerando os critérios de von Mises e Tresca. (2,5 pontos)



$\sigma_{\theta\theta}$ - Tensão circunferencial devido à pressão interna

σ_{rr} - Tensão radial devido à pressão interna

σ_{xx} - Tensão axial devido à pressão interna

$\sigma_{x\theta}$ - Tensão cisalhante devido à torção

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{x\theta} & 0 \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rr} \end{bmatrix}$$

Tensão	Parede Interna do Tubo	Parede Externa do Tubo
$\sigma_{\theta\theta}$	$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(b^2/a^2 + 1)}{(b^2/a^2 - 1)} P = 128 \text{ MPa}$	$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{(b^2/a^2 - 1)} P = 101 \text{ MPa}$
σ_{rr}	$\sigma_{rr} = -P = -27.6 \text{ MPa}$	$\sigma_{rr} = 0$
σ_{xx}	$\sigma_{xx} = \frac{1}{(b^2/a^2 - 1)} P = 50.4 \text{ MPa}$	$\sigma_{xx} = \frac{1}{(b^2/a^2 - 1)} P = 50.4 \text{ MPa}$
$\sigma_{x\theta}$	$\sigma_{x\theta} = a \frac{T}{\pi(b^4 - a^4)/2} = 22.8 \text{ MPa}$	$\sigma_{x\theta} = b \frac{T}{\pi(b^4 - a^4)/2} = 28.4 \text{ MPa}$
σ_M	$\sigma_M = \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{xx}}{2} = 89.4 \text{ MPa}$	$\sigma_M = \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{xx}}{2} = 75.6 \text{ MPa}$
R	$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \sigma_{x\theta}^2} = 45.2 \text{ MPa}$	$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \sigma_{x\theta}^2} = 38.0 \text{ MPa}$
σ_1	$\sigma_1 = \sigma_M + R = 135 \text{ MPa}$	$\sigma_1 = \sigma_M + R = 114 \text{ MPa}$
σ_2	$\sigma_2 = \sigma_M - R = 44.2 \text{ MPa}$	$\sigma_2 = \sigma_m - R = 37.7 \text{ MPa}$
σ_3	$\sigma_3 = \sigma_{rr} = -27.6 \text{ MPa}$	$\sigma_3 = \sigma_{rr} = 0.0$
σ_{VM}	$\sigma_{VM} = 141 \text{ MPa}$	$\sigma_{VM} = 100 \text{ MPa}$
$\tau_{\max}$	$\tau_{\max} = 81.1 \text{ MPa}$	$\tau_{\max} = 56.8 \text{ MPa}$

Exercício 2 (cont.)

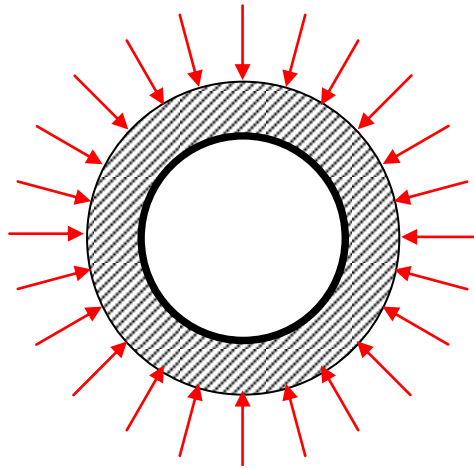
A parede interna é a mais carregada. Portanto, os fatores de segurança são:

$$FS_{VM} = \frac{S_Y}{\sigma_{VM}} = 2.06$$

$$FS_{Tresca} = \frac{S_Y/2}{\tau_{\max}} = 1.79$$

Exercício 3: P1 2011

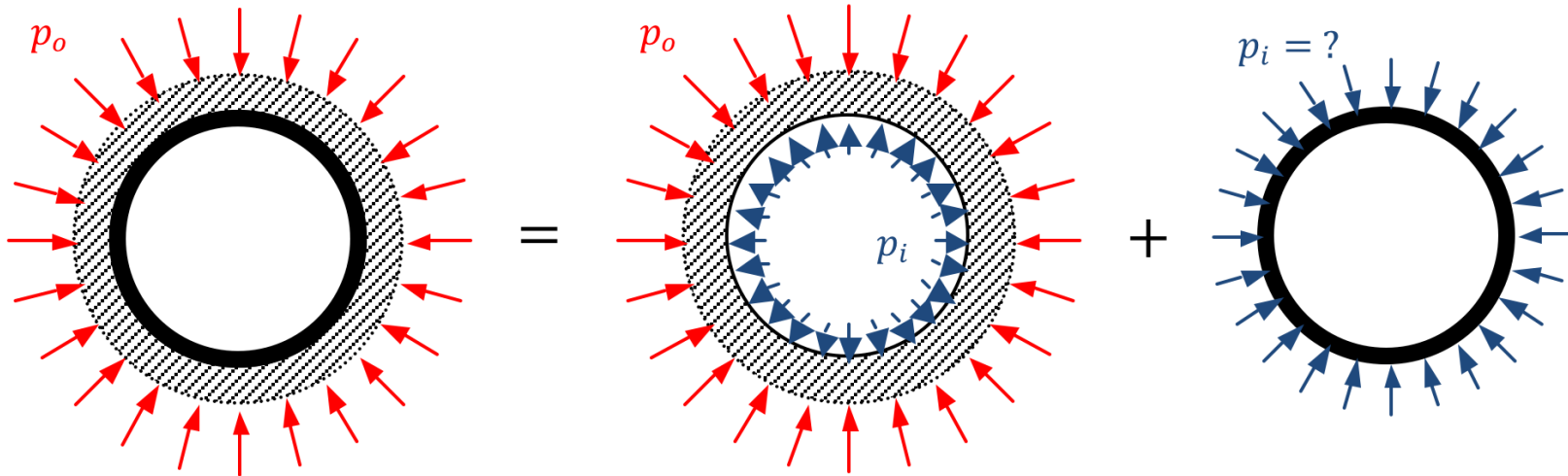
Problema 2. (3,5 pontos) Considere um tubo de aço, com raios externo de 50 mm e interno de 30 mm, internamente revestido por uma camada de material termoplástico com espessura de 2 mm. O módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do aço são respectivamente 200 GPa e 0,3. O módulo de elasticidade do revestimento interno é de 10 GPa. O tubo, que contém um gás corrosivo à pressão atmosférica, é submetido a uma pressão externa de 20 MPa. A tensão de compressão produzida no revestimento interno não pode ultrapassar -70 MPa. Determine a tensão no revestimento e verifique se a pressão externa pode ser aumentada. Caso possível, de quanto poderia ser este aumento? (Considere o revestimento como um tubo de parede fina.)



Tubo: $E_1 = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$

Revestimento: $E_2 = 10 \text{ GPa}$

Exercício 3 (cont.)



Tubo (deslocamento radial)

$$u_r(r) = \frac{(1 - \nu_T)r + (1 + \nu_T)(b^2/r)}{E_T(b^2/a^2 - 1)} p_i - \frac{(1 - \nu_T)(b^2/a^2)r + (1 + \nu_T)(b^2/r)}{E_T(b^2/a^2 - 1)} p_o, \quad a \leq r \leq b$$

Revestimento (variação do raio do revestimento)

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{p_i a}{E_R t}$$

Exercício 3 (cont.)

Compatibilidade geométrica: $\Delta a = u_r(a)$

$$-\frac{p_i a^2}{E_R t} = \frac{(1 - \nu_T)a + (1 + \nu_T)(b^2/a)}{E_T(b^2/a^2 - 1)} p_i - \frac{2(b^2/a)}{E_T(b^2/a^2 - 1)} p_o$$

Logo:

$$p_i = \left[\frac{a^2}{E_R t} + \frac{(1 - \nu_T)a + (1 + \nu_T)(b^2/a)}{E_T(b^2/a^2 - 1)} \right]^{-1} \left(\frac{2(b^2/a)}{E_T(b^2/a^2 - 1)} \right) p_o$$

Substituindo-se os valores:

$$p_i = 0,205 \text{ MPa}$$

A tensão circunferencial na parede do revestimento é:

$$\sigma_{\theta\theta} = -p_i a/t = -3,10 \text{ MPa}$$

A pressão externa pode ser aumentada por um fator 22,6 , até um valor máximo de 452 MPa.