

Departamento de Engenharia Mecânica
ENG 1704 - Mecânica dos Sólidos II

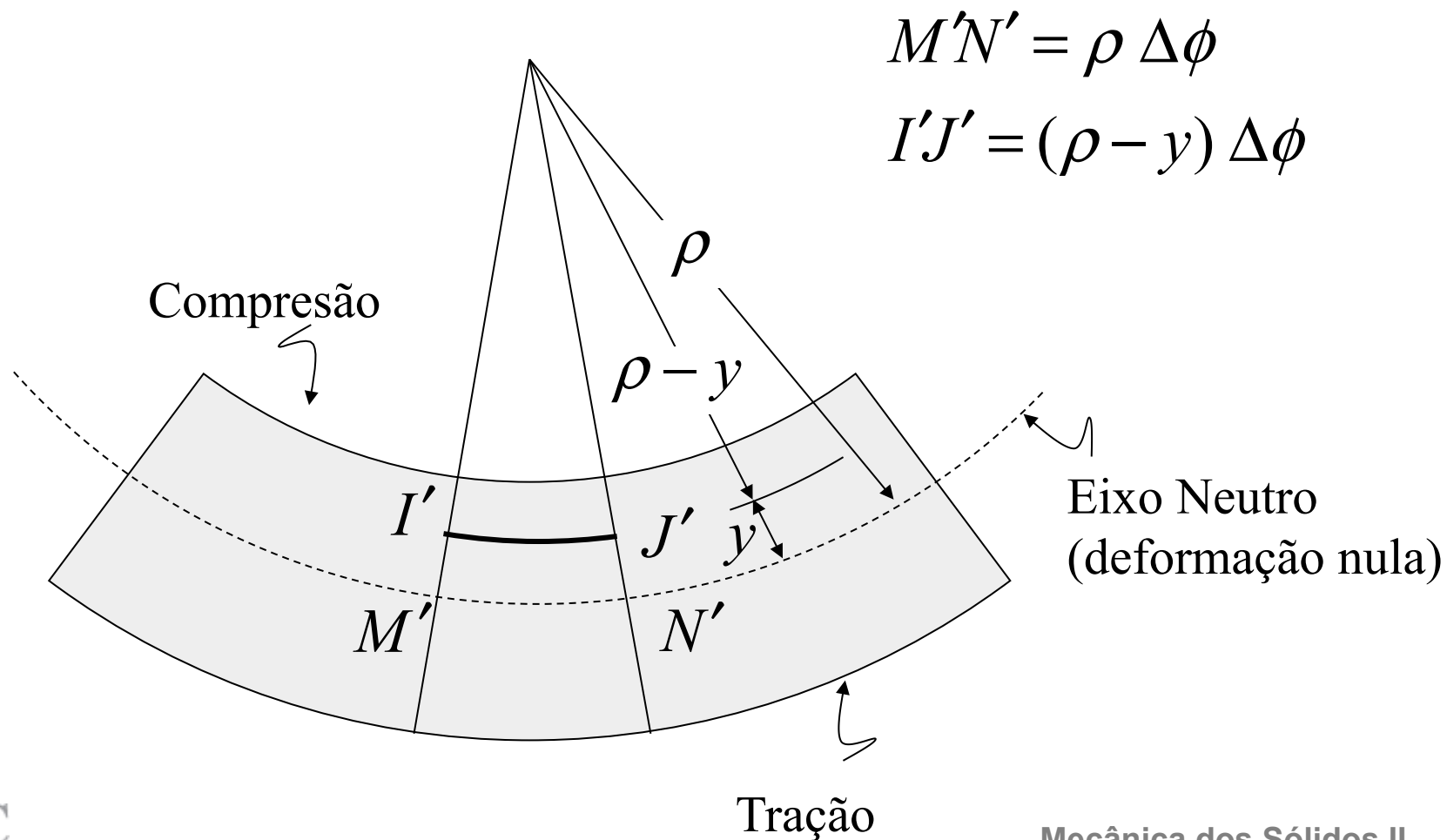


Teoria de Vigas

Prof. Arthur Braga

Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação do segmento IJ



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação longitudinal

$$\varepsilon_{xx} = \frac{I'J' - IJ}{IJ} = \frac{I'J' - M'N'}{M'N'}$$

$$M'N' = \rho \Delta\phi$$

$$I'J' = (\rho - y) \Delta\phi$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{d\phi}{dx} y$$

Deformação cisalhante

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = 0$$

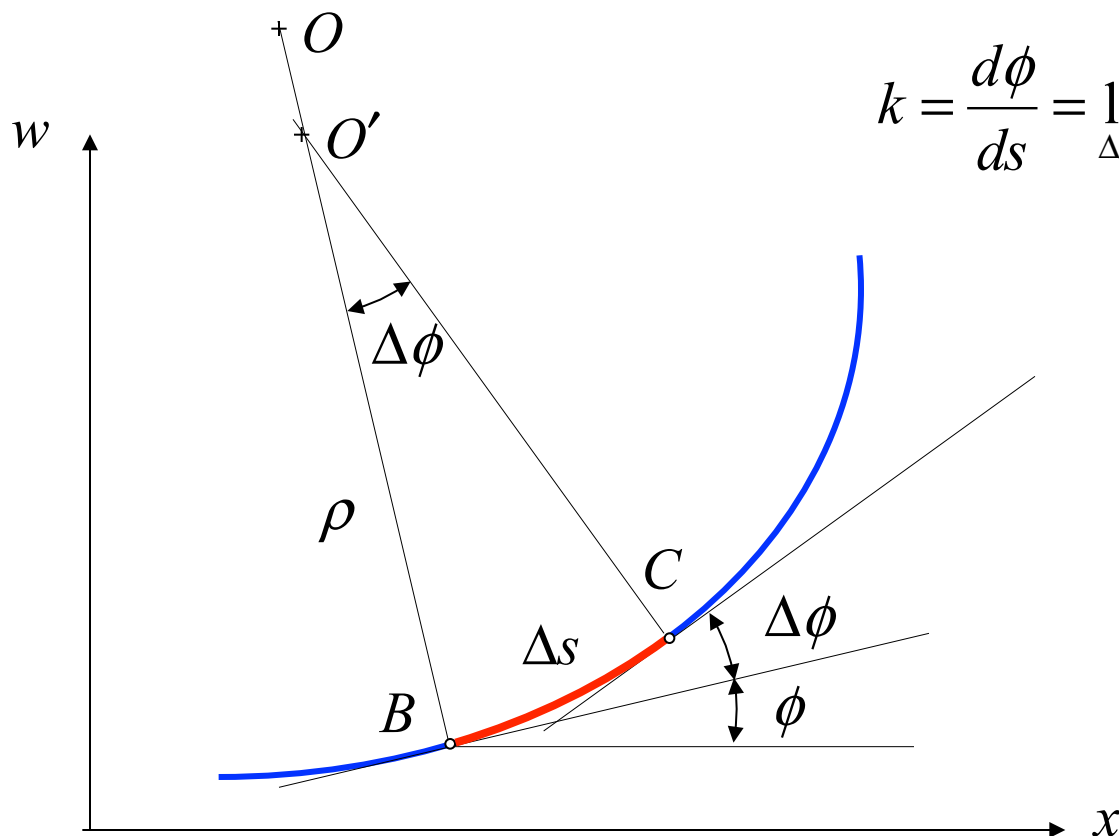
Simetria (flexão pura)

Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Curvatura

A curvatura no ponto B é definida como:

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{O'B} = \frac{1}{\rho}$$

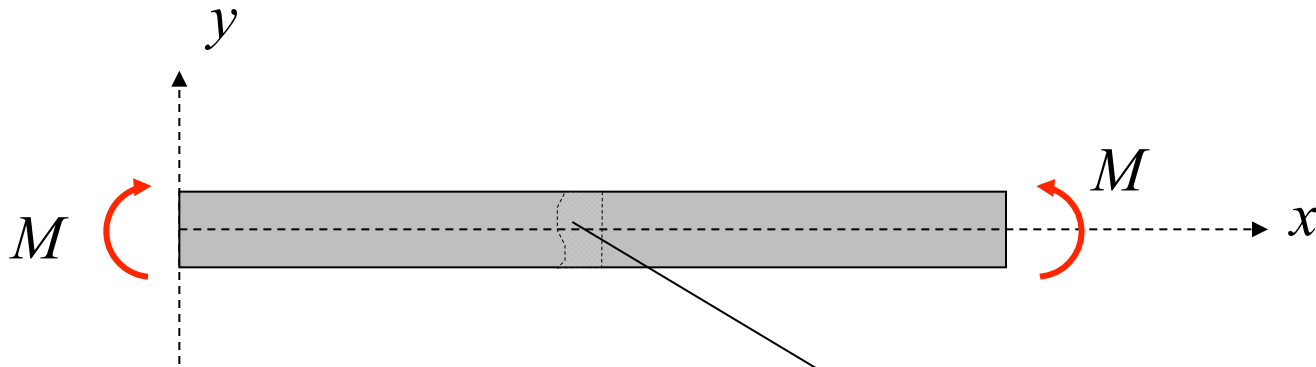


Para $w' \ll 1$

$$k \approx \frac{d^2w}{dx^2}$$

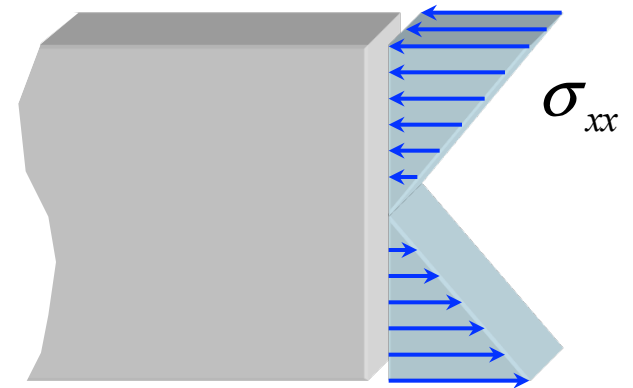
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Tensões Normais de Flexão



$$[\sigma(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(y) = -y \frac{M}{I}$$



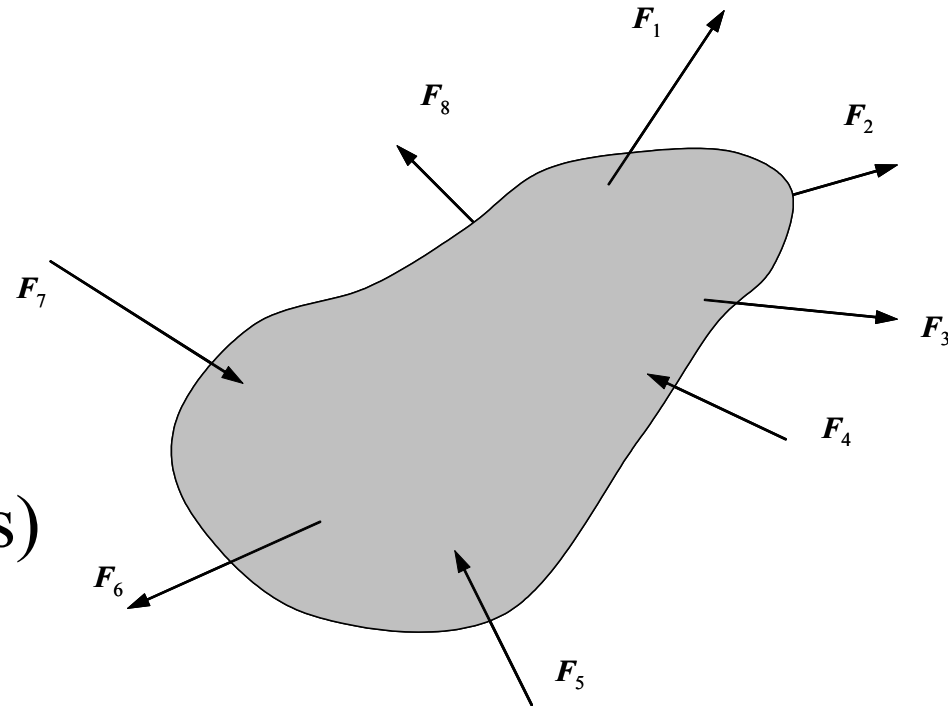
Teoria da Elasticidade

Problema

Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

Determinar

- Esforços internos (tensões)
- Deformações
- Deslocamentos



Teoria da Elasticidade

- Relações entre deslocamentos e deformações

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Teoria da Elasticidade

- Relações constitutivas (tensão vs. deformação)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Teoria da Elasticidade

- Equações de Equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Teoria da Elasticidade

- 15 Equações
 - Equilíbrio (3)
 - Deformação *vs.* Deslocamentos (6)
 - Tensão *vs.* Deformação (6)

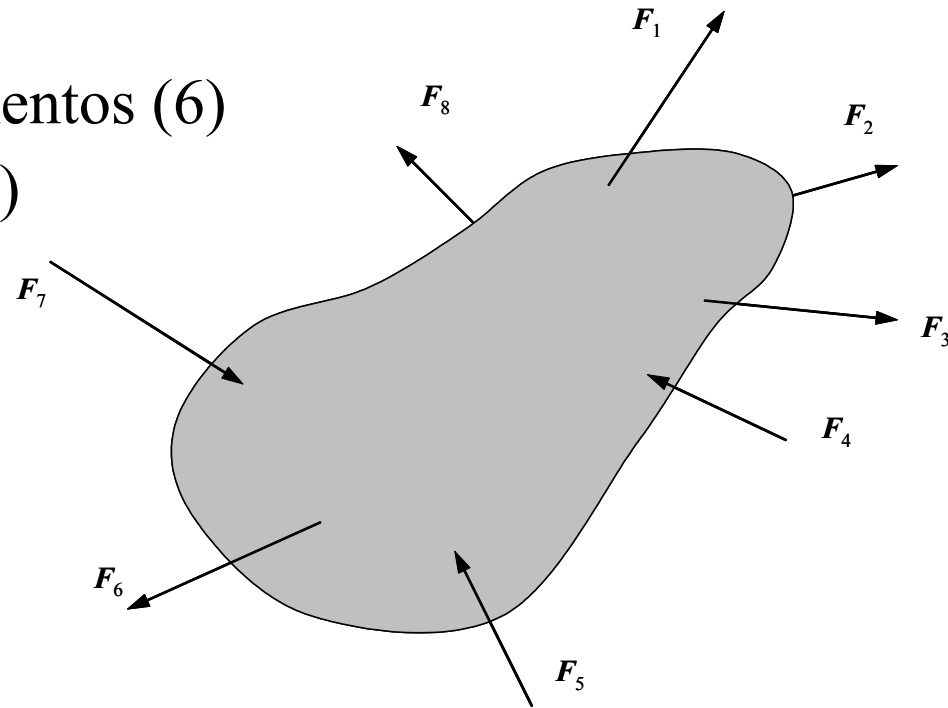
- 15 Variáveis:

$$u_x, u_y, u_z$$

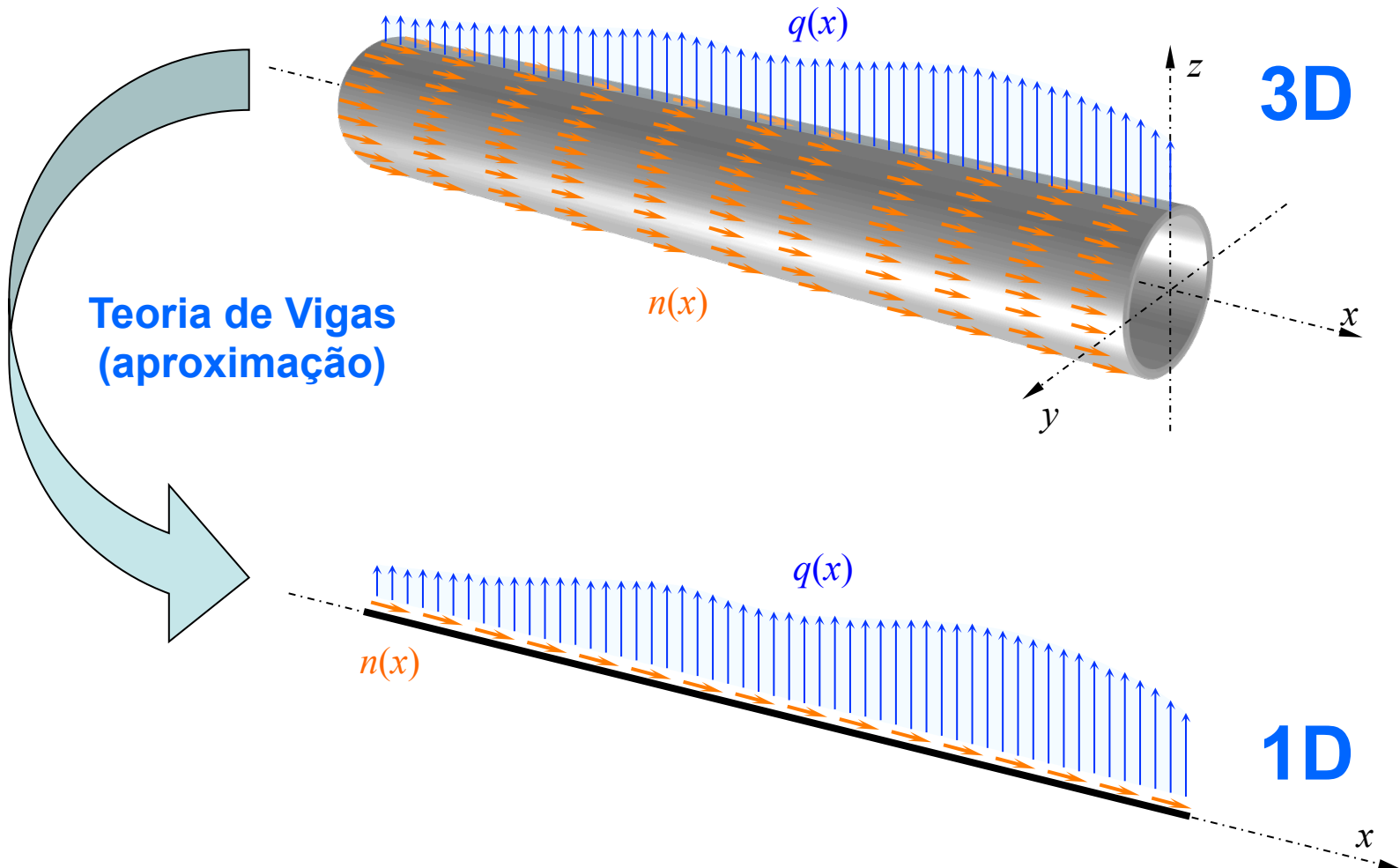
$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$$

$$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$$

- Condições de contorno

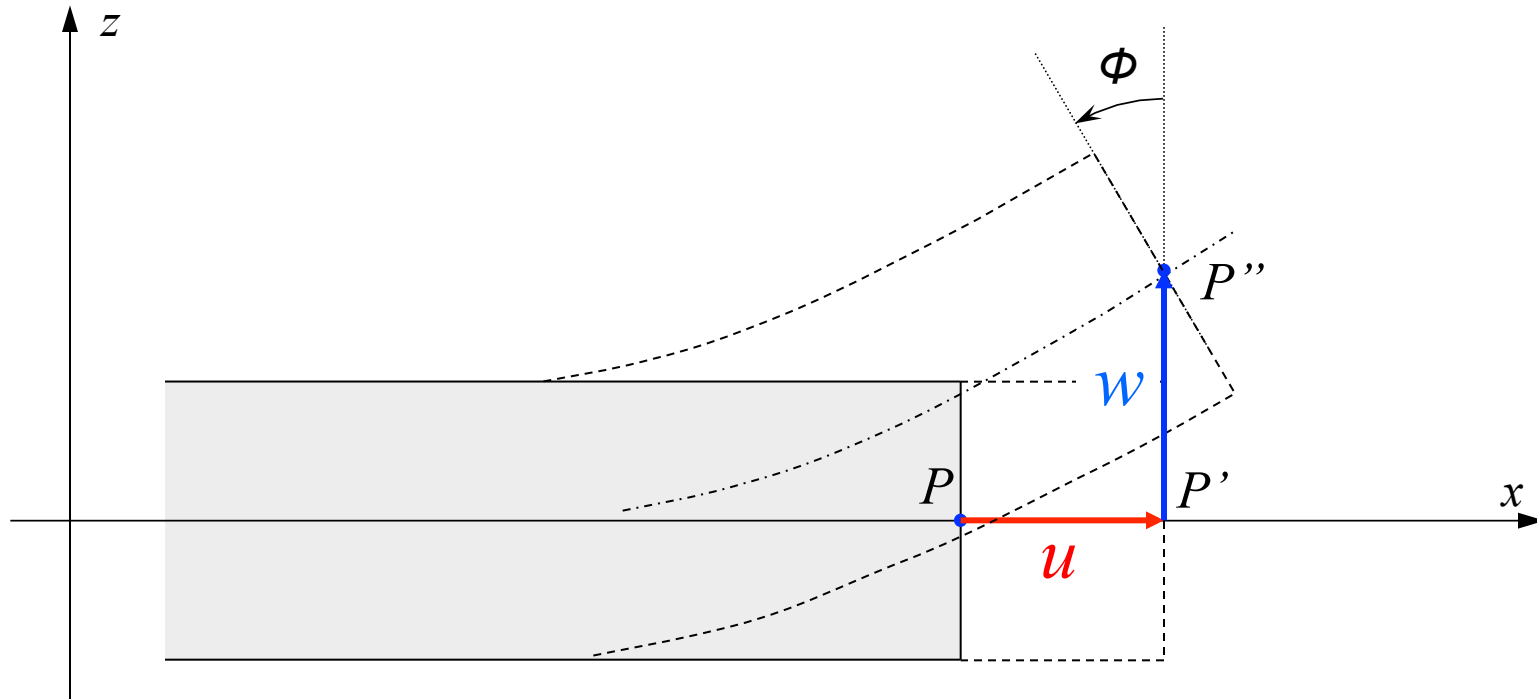


Teoria de Vigas



Teoria de Vigas

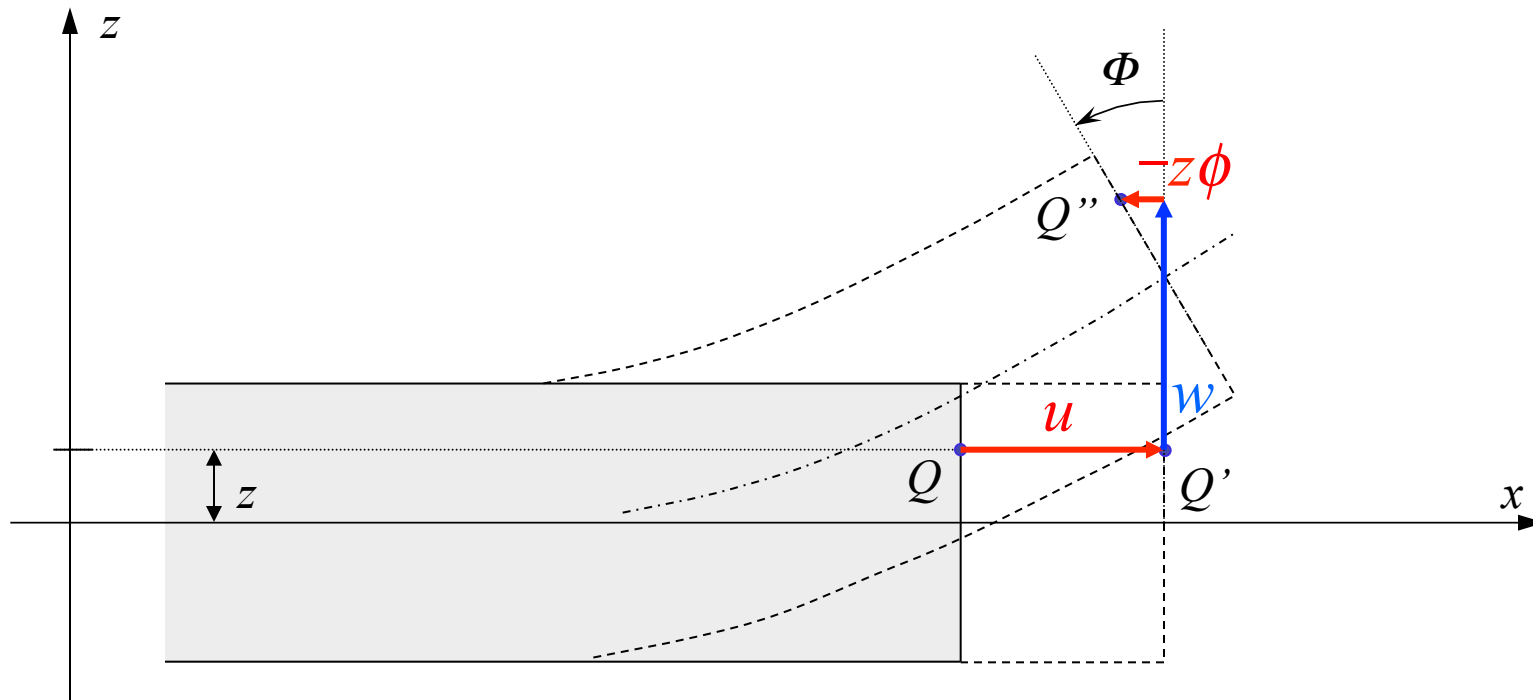
Hipótese Cinemática $\begin{cases} u_x(x,0) = u(x) \\ u_z(x,0) = w(x) \end{cases}$



Teoria de Vigas

Hipótese Cinemática

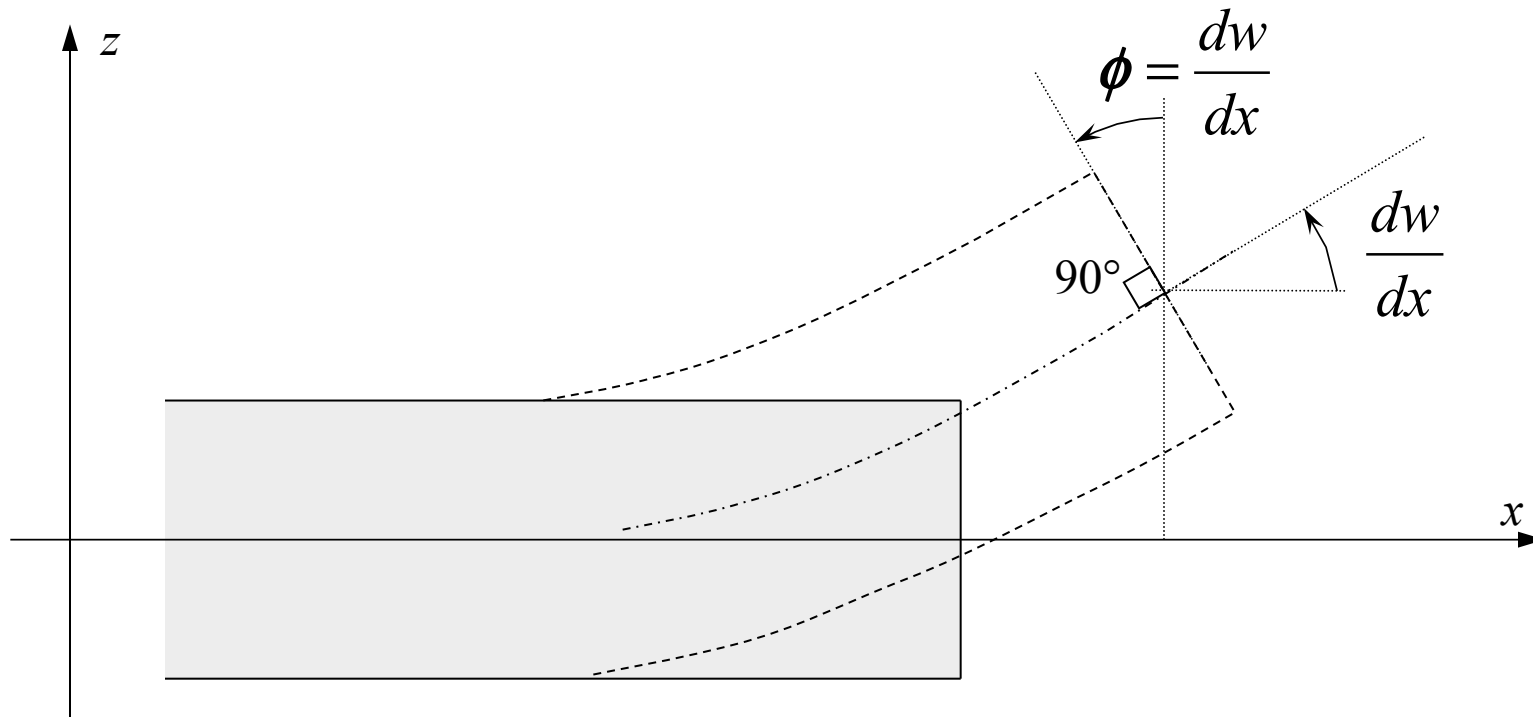
$$\begin{cases} u_x(x, z) = u(x) - z\phi(x) \\ u_z(x, z) = w(x) \end{cases}$$



Teoria de Vigas

Teoria de Bernoulli-Euler

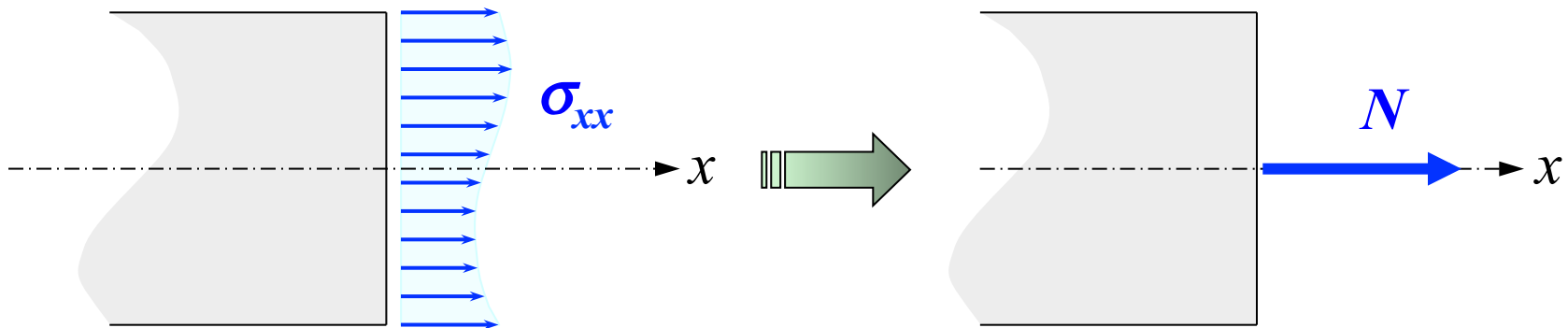
$$\begin{cases} u_x(x, z) = u(x) - z \frac{dw}{dx} \\ u_z(x, z) = w(x) \end{cases}$$



Teoria de Vigas

Definição de Esforços Generalizados

O Esforço Normal

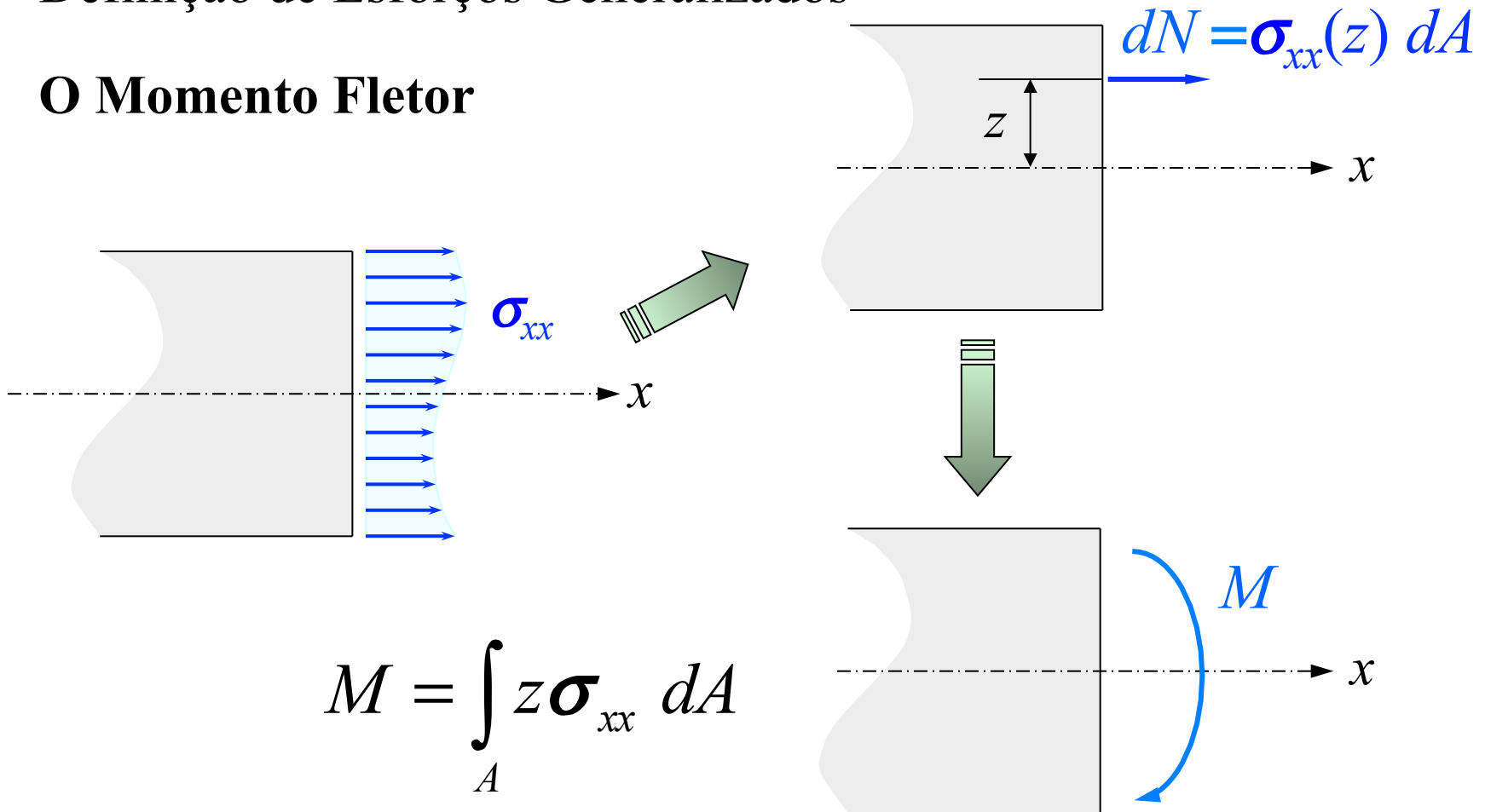


$$N = \int_A \sigma_{xx} dA$$

Teoria de Vigas

Definição de Esforços Generalizados

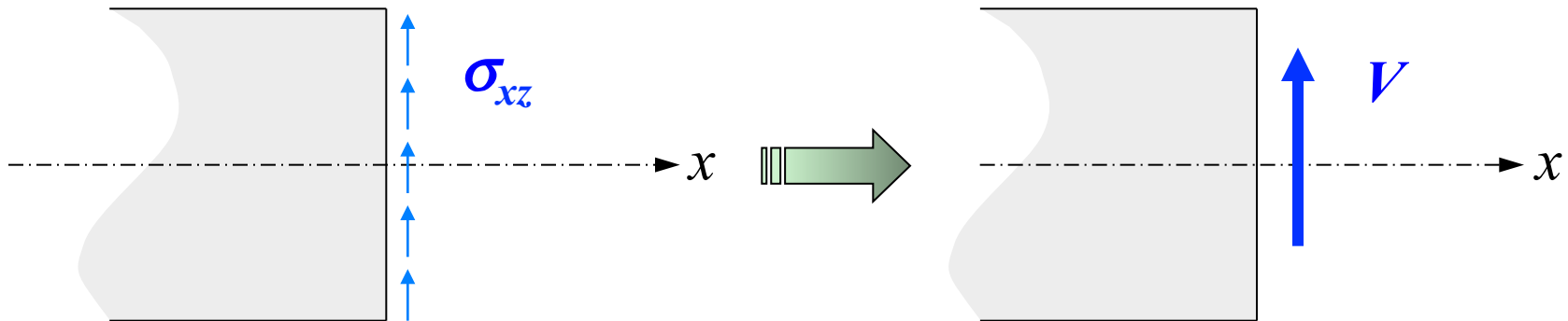
O Momento Fletor



Teoria de Vigas

Definição de Esforços Generalizados

O Esforço Cortante



$$V = \int_A \sigma_{xz} dA$$

Teoria de Vigas

Equilíbrio (Tensão Plana)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$



$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dA = 0$$

$$\int_A z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dA = 0$$

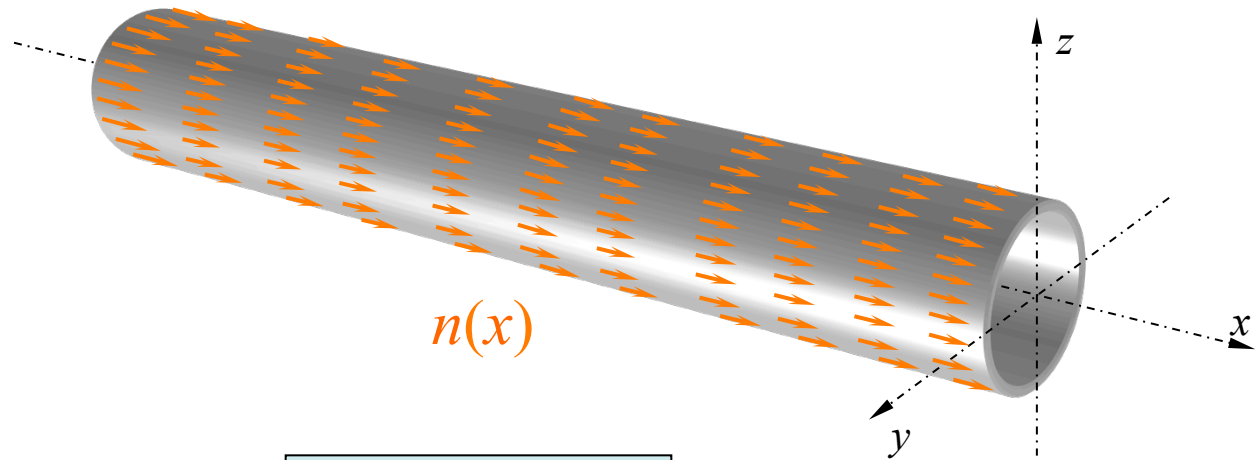
$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA = 0$$

Teoria de Vigas

Equilíbrio (cont.)

$$\int_A \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA = \frac{d}{dx} \int_A \sigma_{xx} dA = \frac{dN}{dx}$$

$$\int_A \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dA = n(x)$$



logo

$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dN}{dx} + n(x) = 0}$$

Teoria de Vigas

Equilíbrio (cont.)

$$\int_A z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA = \frac{d}{dx} \int_A z \sigma_{xx} dA = \frac{dM}{dx}$$

$$\int_A z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dA = -V$$

logo

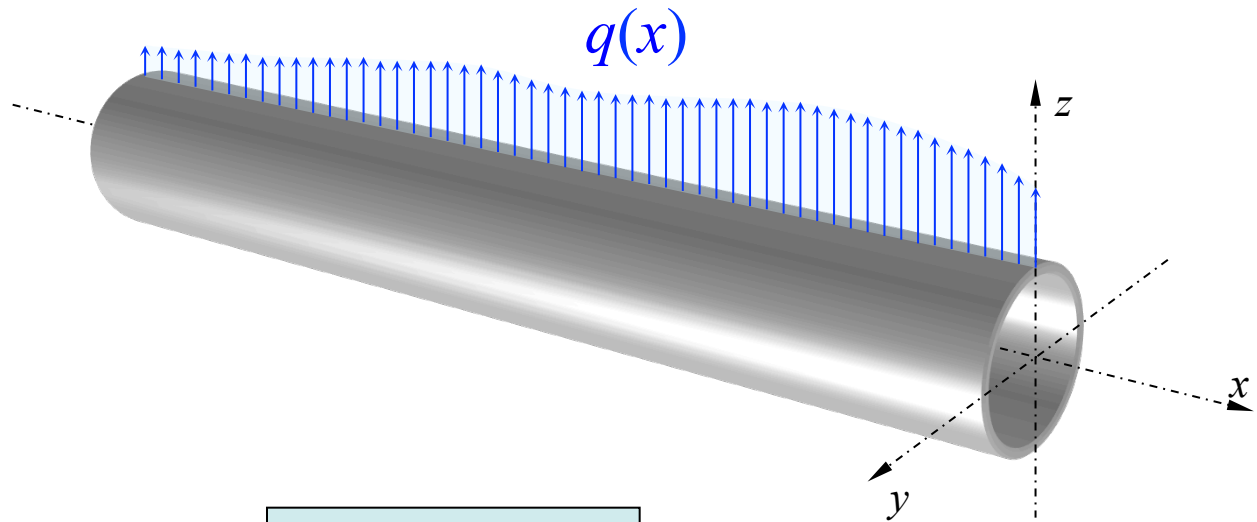
$$\int_A z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dM}{dx} - V(x) = 0}$$

Teoria de Vigas

Equilíbrio (cont.)

$$\int_A \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dA = \frac{d}{dx} \int_A \sigma_{xz} dA = \frac{dV}{dx}$$

$$\int_A \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dA = q(x)$$



logo

$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dV}{dx} + q(x) = 0}$$

Teoria de Vigas

Equilíbrio

Extensão
(Esforços Axiais)

$$\frac{dN}{dx} + n(x) = 0$$

Flexão
(Esforços de Flexão)

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dx} - V(x) &= 0 \\ \frac{dV}{dx} + q(x) &= 0\end{aligned}$$

Teoria de Vigas

Deformações

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Relações Constitutivas

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E \frac{du}{dx} - zE \frac{d^2 w}{dx^2}$$

~~$$\sigma_{xz} = 2G \epsilon_{xz} = 0$$~~

Teoria de Vigas

Relações Constitutivas em termos dos esforços generalizados

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA = \int_A E \frac{du}{dx} dA - \int_A z E \frac{d^2 w}{dx^2} dA = EA \frac{du}{dx}$$

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA = \int_A z E \frac{du}{dx} dA - \int_A z^2 E \frac{d^2 w}{dx^2} dA = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

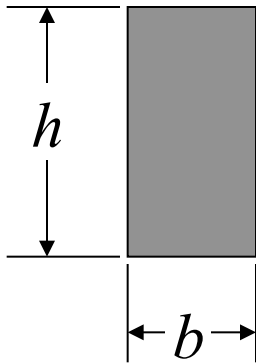
onde I é o momento de inércia da seção transversal da viga:

$$I = \int_A z^2 dA$$

Teoria de Vigas

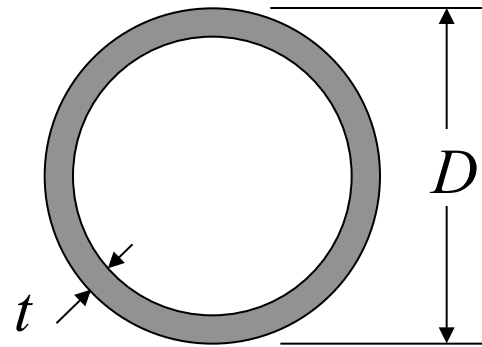
Momento de Inércia $I = \int_A z^2 dA$

Seção Retangular



$$I = \frac{bh^3}{12}$$

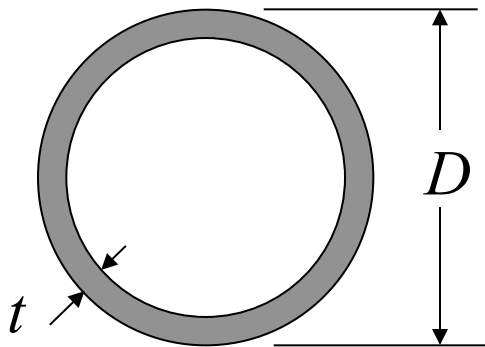
Seção Tubular



$$I = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \left(1 - \frac{2t}{D} \right)^4 \right) \approx \frac{\pi D^3 t}{8}$$

Momento de Inércia

Seção Tubular

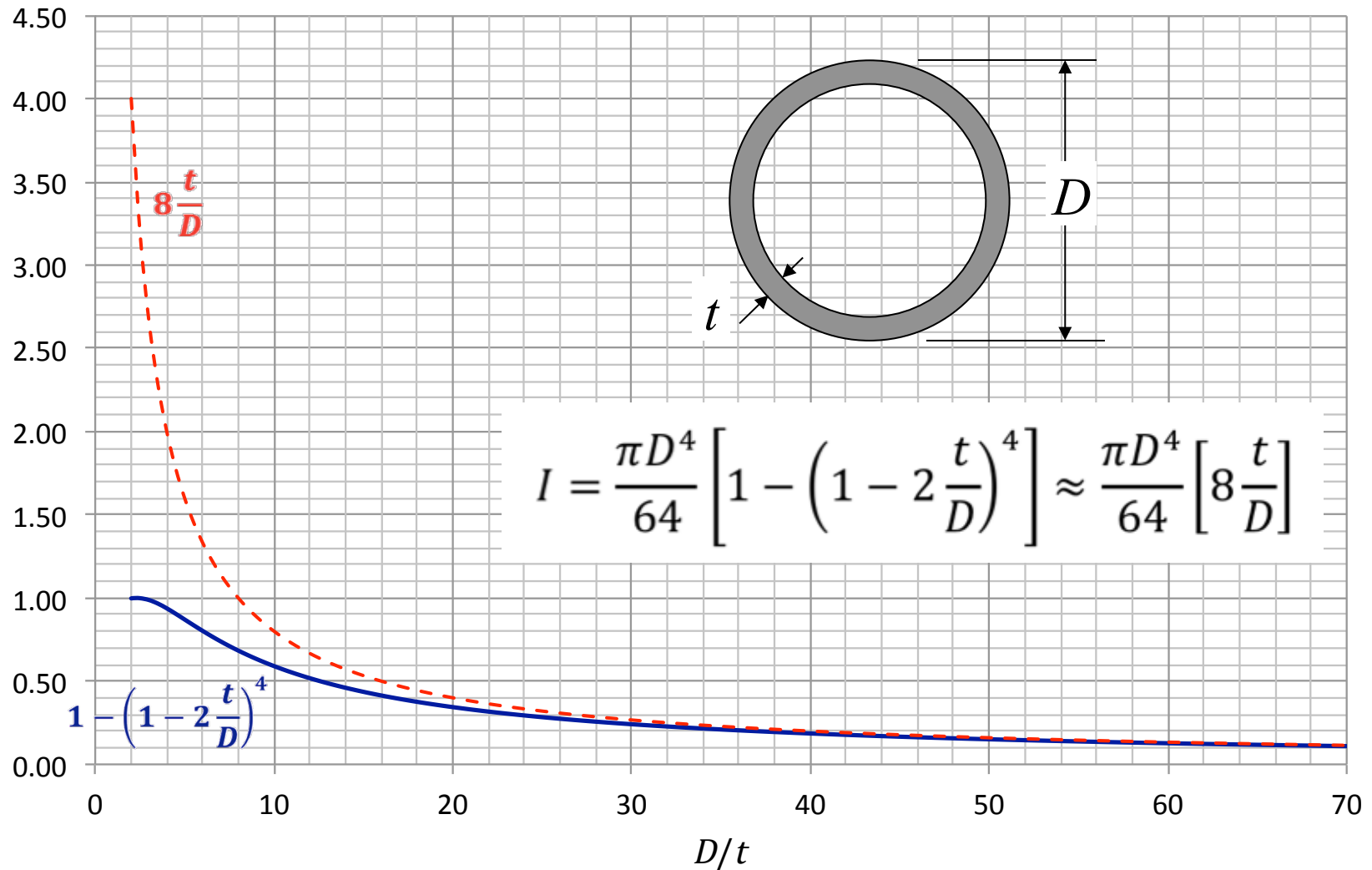


$$I = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4]$$

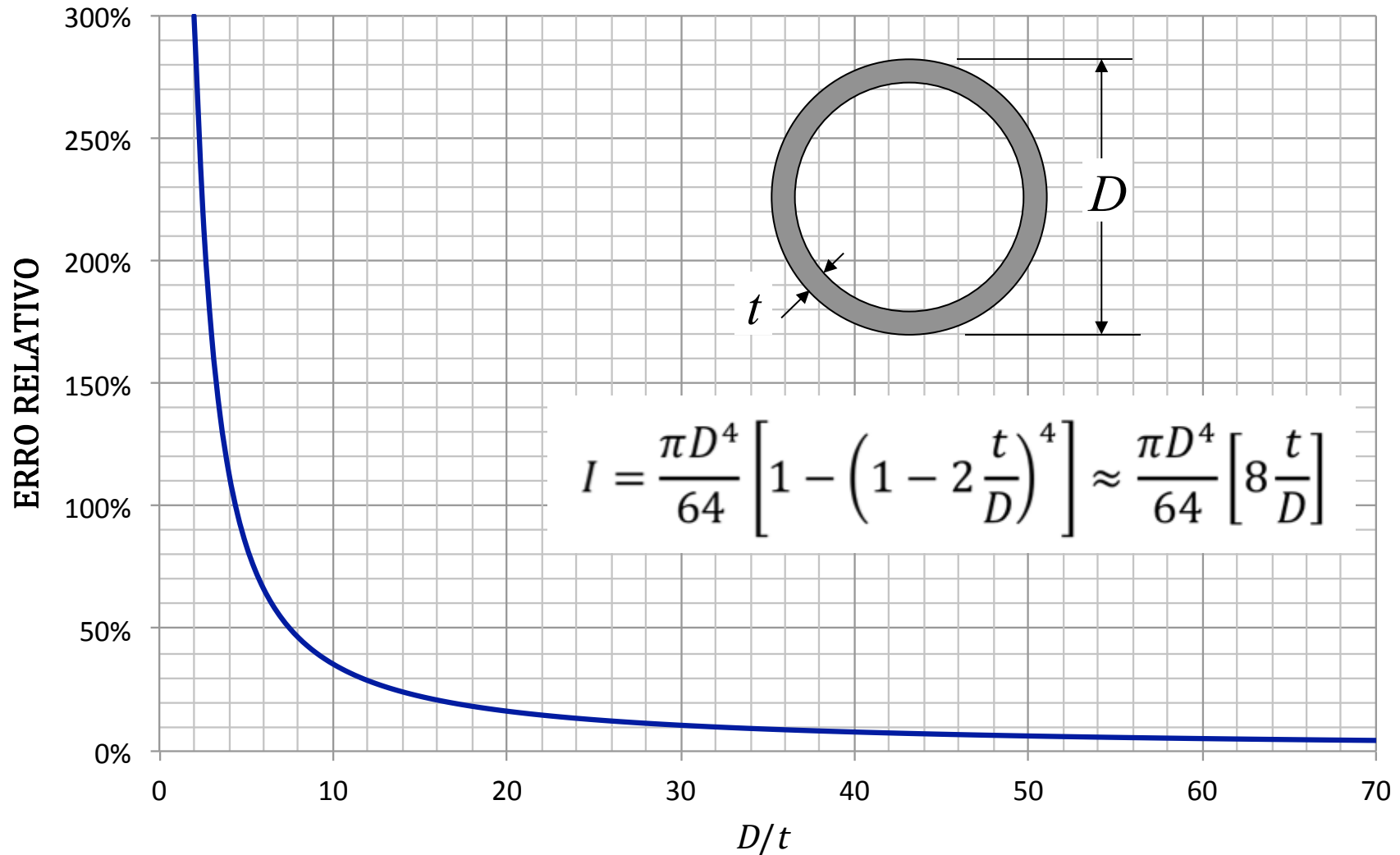
Para $D \gg t$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(1 - 2 \frac{t}{D} \right)^4 \right] \approx \frac{\pi D^4}{64} \left[8 \frac{t}{D} \right]$$

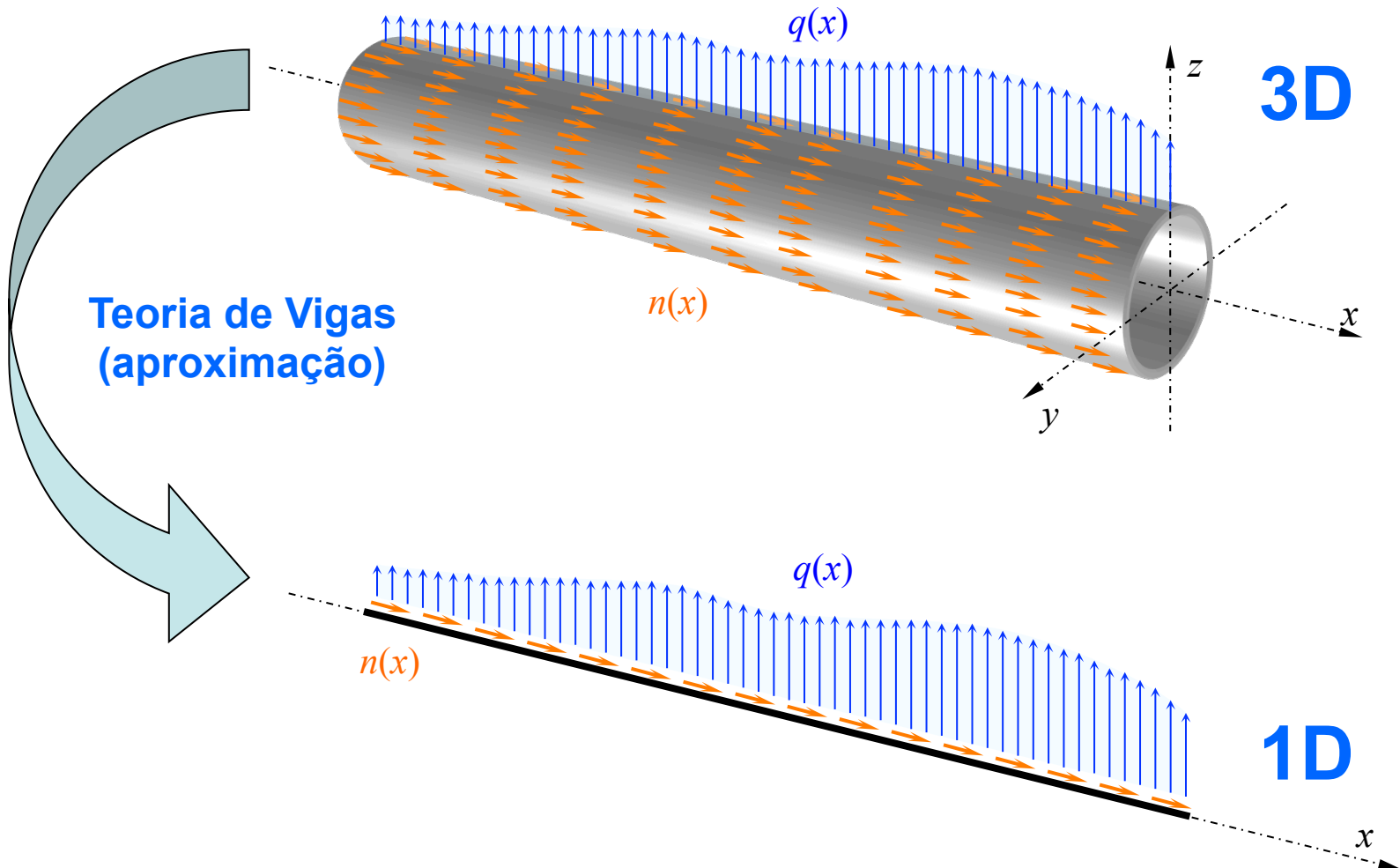
Momento de Inércia



Momento de Inércia



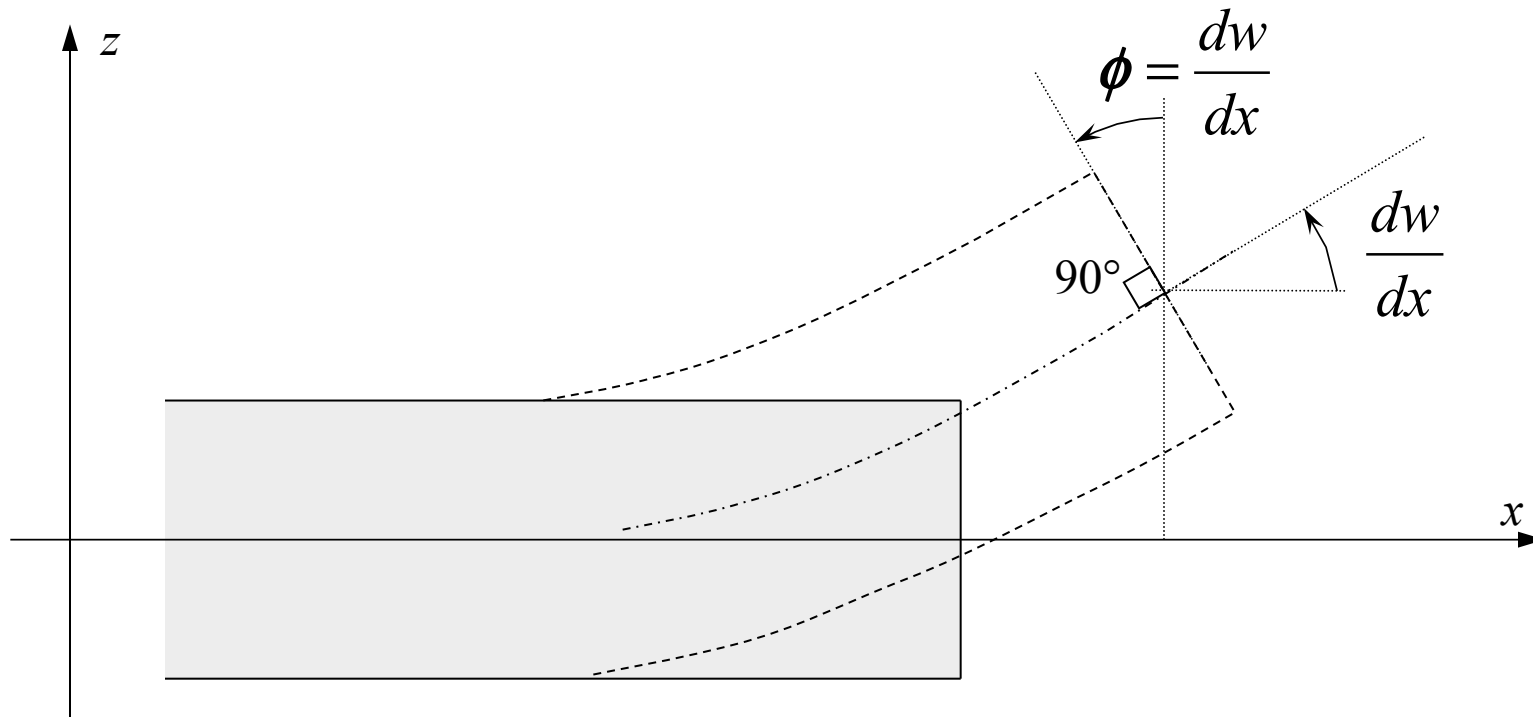
Teoria de Vigas



Teoria de Vigas

Teoria de Bernoulli-Euler

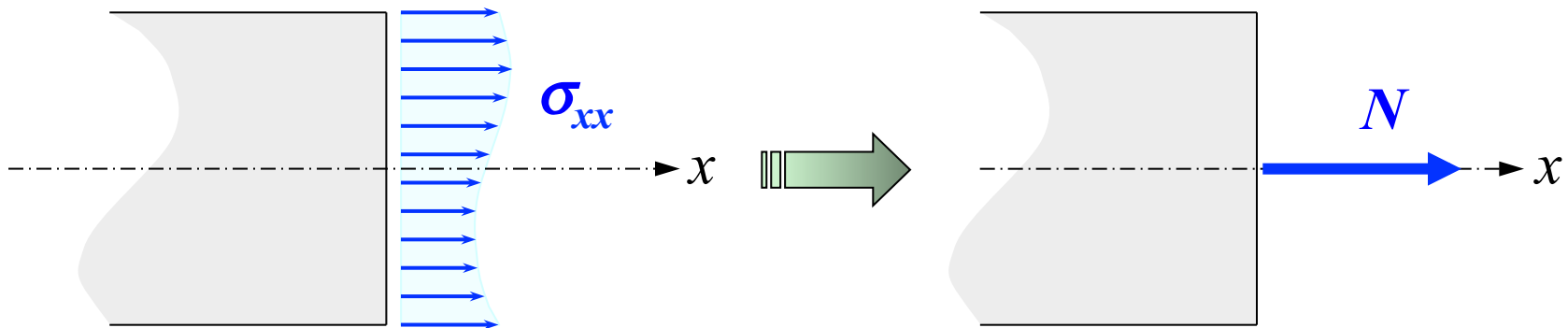
$$\begin{cases} u_x(x, z) = u(x) - z \frac{dw}{dx} \\ u_z(x, z) = w(x) \end{cases}$$



Teoria de Vigas

Definição de Esforços Generalizados

O Esforço Normal

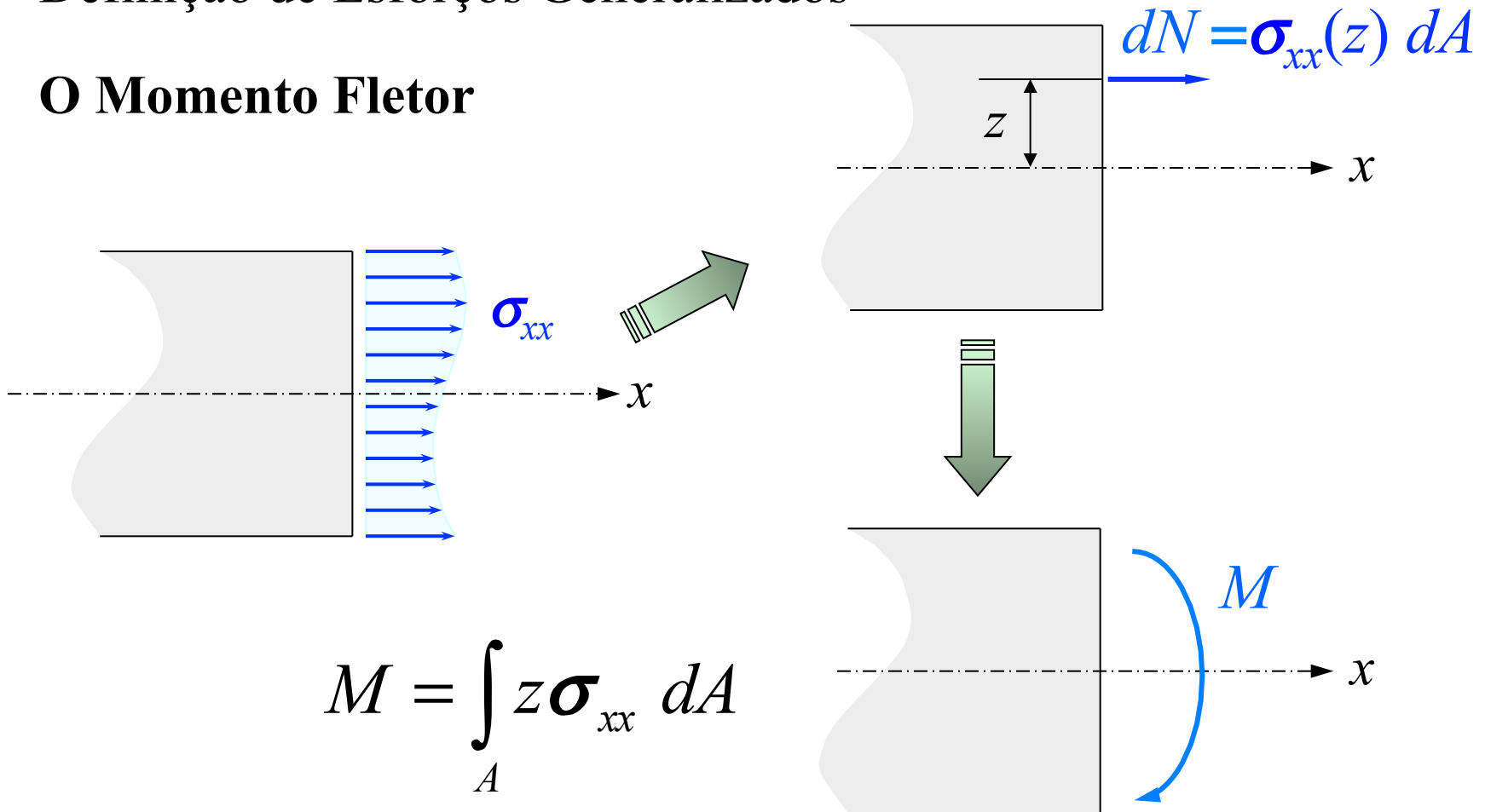


$$N = \int_A \sigma_{xx} dA$$

Teoria de Vigas

Definição de Esforços Generalizados

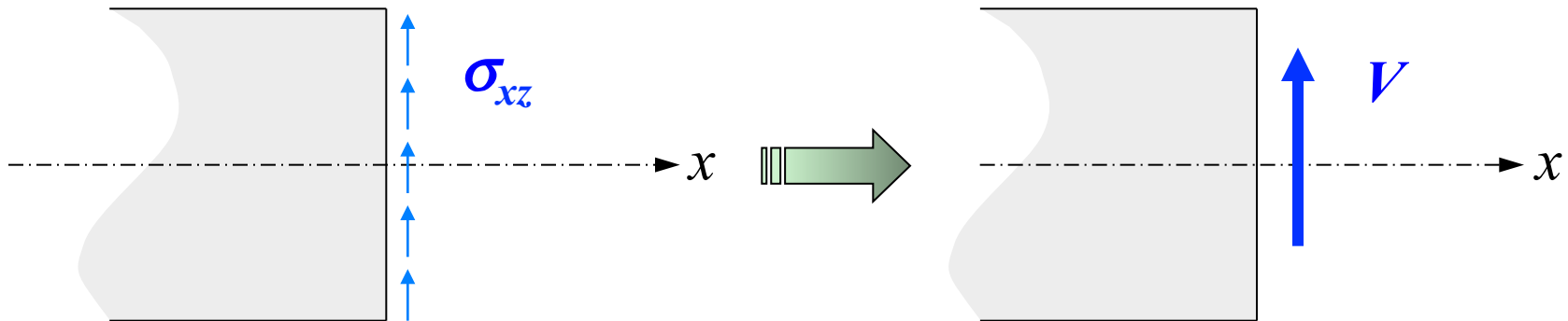
O Momento Fletor



Teoria de Vigas

Definição de Esforços Generalizados

O Esforço Cortante



$$V = \int_A \sigma_{xz} dA$$

Teoria de Vigas

Equilíbrio (Tensão Plana)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$



$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dA = 0$$

$$\int_A z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dA = 0$$

$$\int_A \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA = 0$$

Teoria de Vigas

Equilíbrio

Extensão
(Esforços Axiais)

$$\frac{dN}{dx} + n(x) = 0$$

Flexão
(Esforços de Flexão)

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dx} - V(x) &= 0 \\ \frac{dV}{dx} + q(x) &= 0\end{aligned}$$

Teoria de Vigas

Deformações

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Relações Constitutivas: **ESTADO UNIAXIAL DE TENSÕES**

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E \frac{du}{dx} - zE \frac{d^2 w}{dx^2}$$

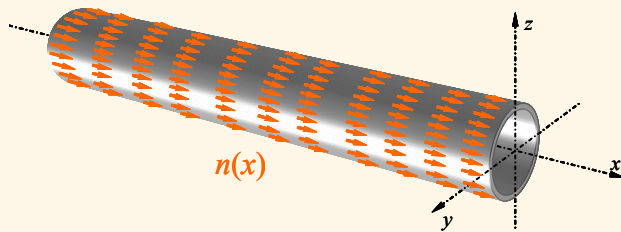
$$\sigma_{xz} = 2G \epsilon_{xz} = 0$$

Teoria de Vigas

Extensão (Esforços Axiais)

$$\frac{dN}{dx} + n(x) = 0$$

$$N = EA \frac{du}{dx}$$

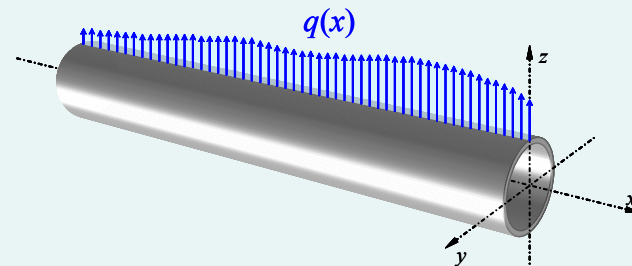


Flexão (Esforços de Flexão)

$$\frac{dM}{dx} - V(x) = 0$$

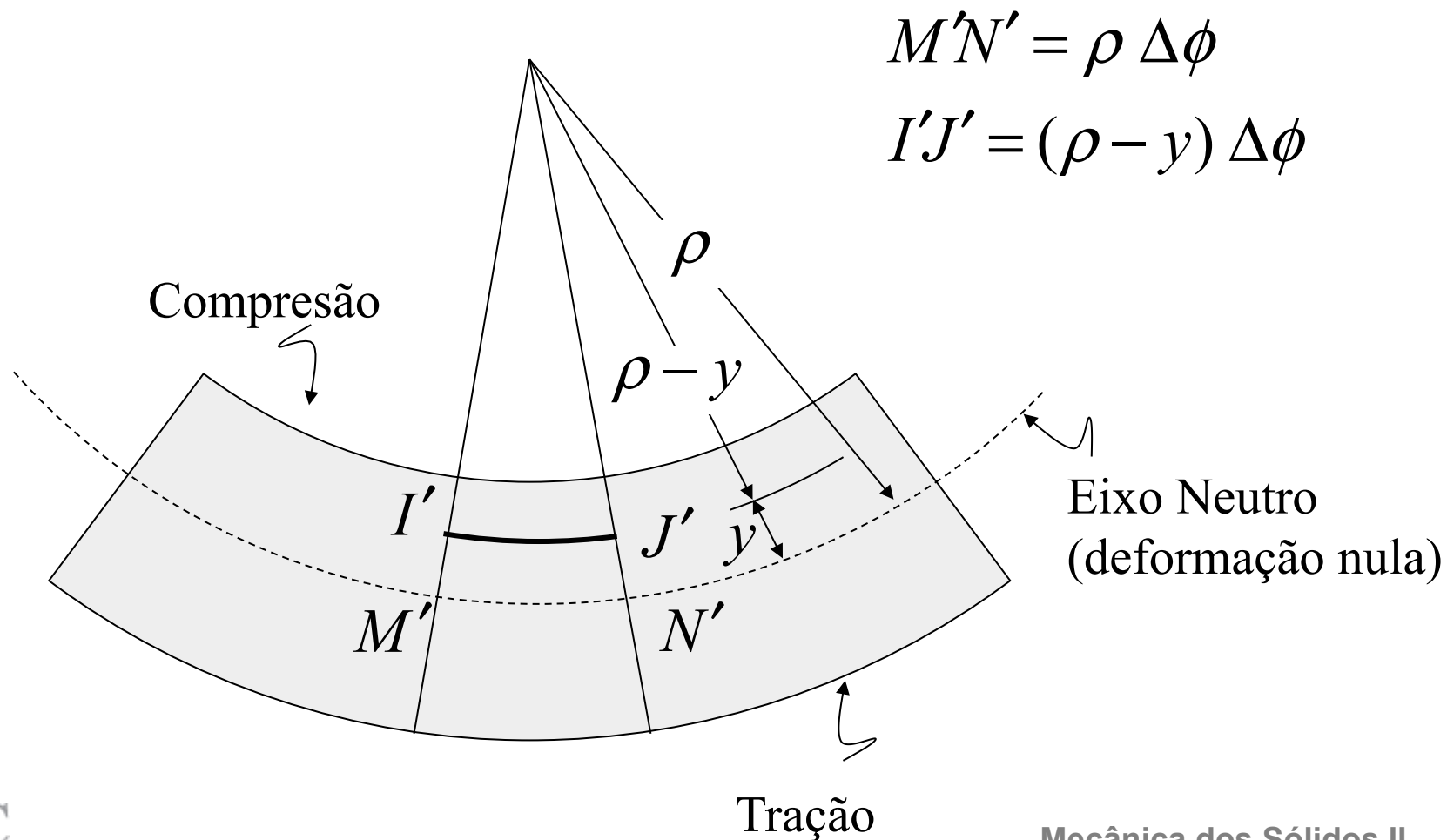
$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0$$

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação do segmento IJ



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação longitudinal

$$\varepsilon_{xx} = \frac{I'J' - IJ}{IJ} = \frac{I'J' - M'N'}{M'N'}$$

$$M'N' = \rho \Delta\phi$$

$$I'J' = (\rho - y) \Delta\phi$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{d\phi}{dx} y$$

Deformação cisalhante

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = 0$$

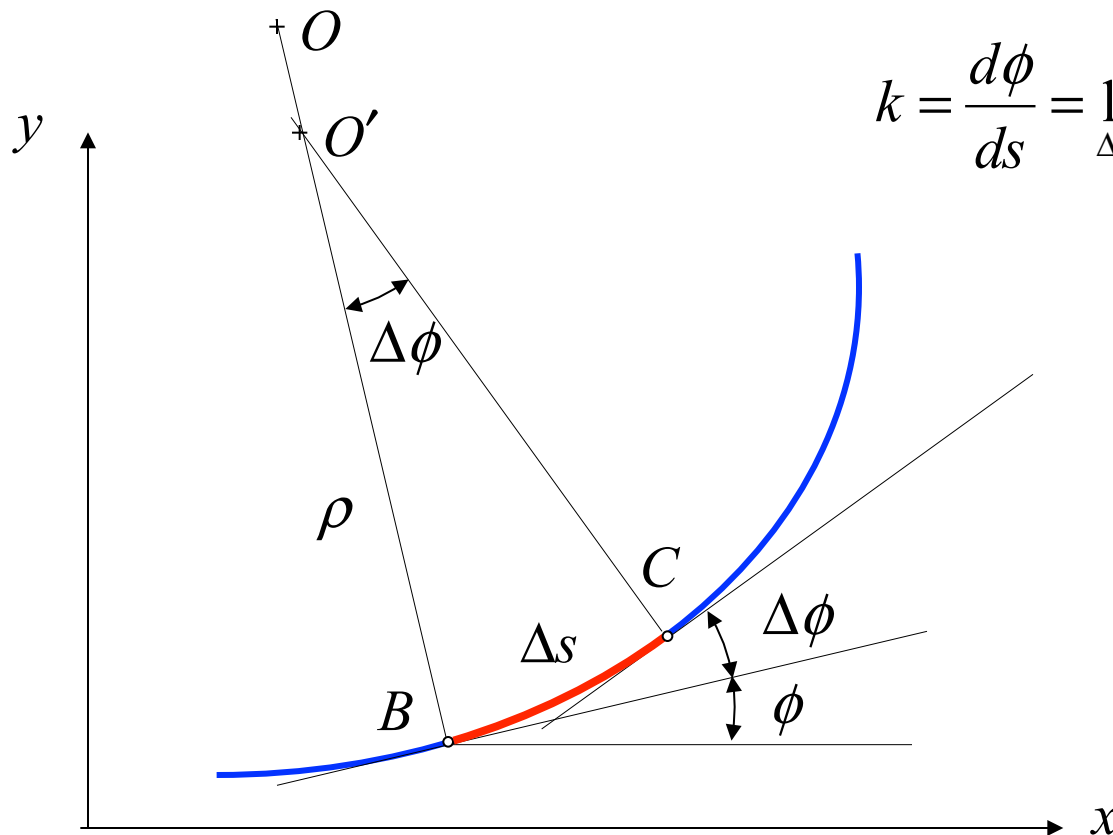
Simetria (flexão pura)

Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Curvatura

A curvatura no ponto B é definida como:

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{O'B} = \frac{1}{\rho}$$

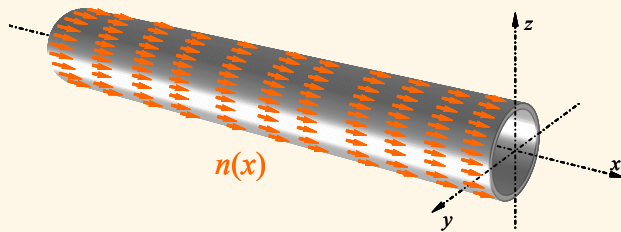


Teoria de Vigas

Extensão (Esforços Axiais)

$$\frac{dN}{dx} + n(x) = 0$$

$$N = EA \frac{du}{dx}$$

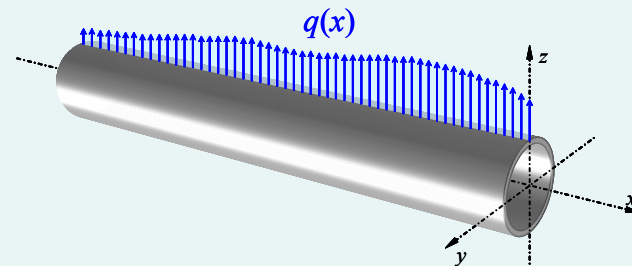


Flexão (Esforços de Flexão)

$$\frac{dM}{dx} - V(x) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0$$

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

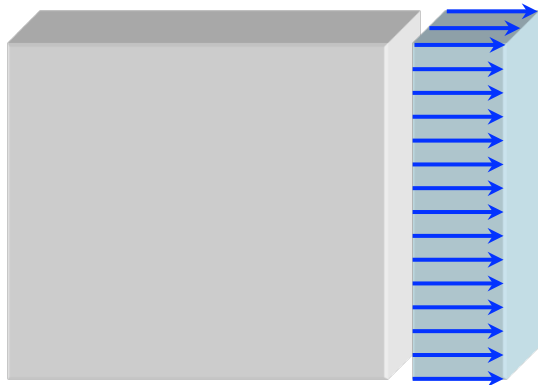


Teoria de Vigas

Tensões

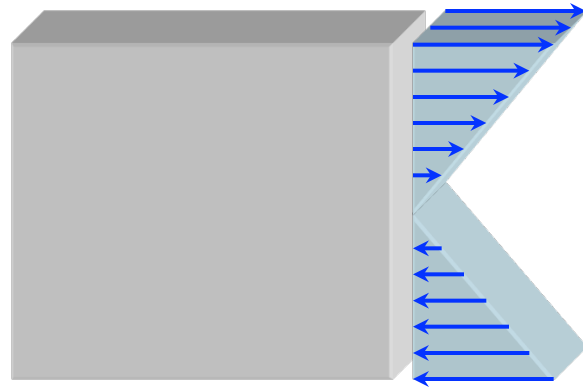
Extensão
(Esforços Axiais)

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = E \frac{du}{dx} = \frac{N}{A}$$



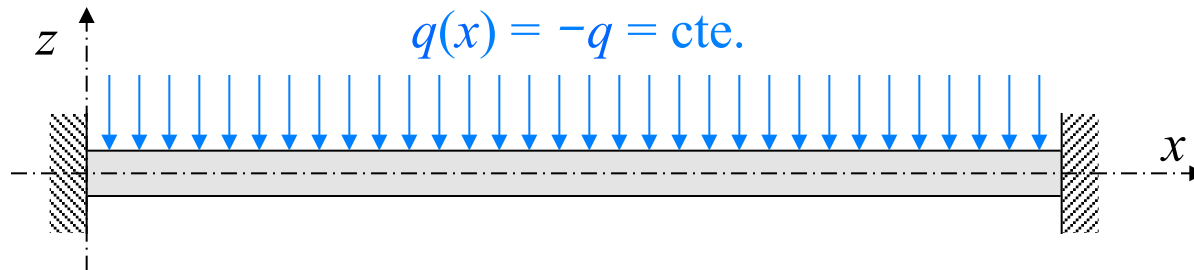
Flexão
(Esforços de Flexão)

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = -zE \frac{d^2w}{dx^2} = z \frac{M}{I}$$



Teoria de Vigas

Ex. 1 (flexão): Viga bi-engastada sujeita a carregamento transversal uniforme



$$\frac{dM}{dx} - V(x) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} - q = 0$$

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Condições
de Contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ \frac{dw}{dx}(0) = 0 \\ w(L) = 0 \\ \frac{dw}{dx}(L) = 0 \end{array} \right.$$

Teoria de Vigas (Ex. 1 – continuação)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dM}{dx} - V(x) = 0 \\ \frac{dV}{dx} - q = 0 \\ M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \end{array} \right\} \Rightarrow EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -q \Rightarrow w(x) = -\frac{qx^4}{24EI} + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Utilizando-se as condições de contorno:

$$c_4 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_2 = -\frac{qL^2}{24EI}, \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{qL}{12EI}$$

$$w(x) = -\frac{qL^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Teoria de Vigas (Ex.1 – continuação)

$$w(x) = -\frac{qL^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{qL^2}{12} \left[6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 6 \left(\frac{x}{L} \right) + 1 \right]$$

$$w_{\max} = w(L/2) = -\frac{qL^4}{384EI} \quad M_{\max} = M(0) = M(L) = \frac{qL^2}{12}$$

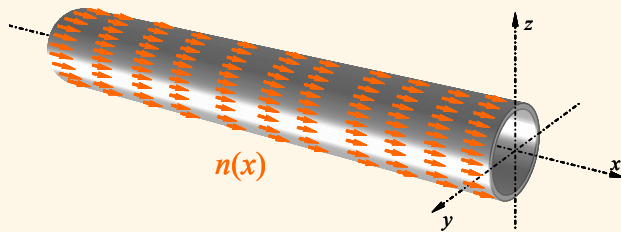
$$\max \{ |\sigma_{xx}| \} = \frac{qL^2}{3\pi D^2 t} \quad \text{para viga de seção tubular (D/t} \gg 1)$$

Teoria de Vigas

Extensão (Esforços Axiais)

$$\frac{dN}{dx} + n(x) = 0$$

$$N = EA \frac{du}{dx}$$

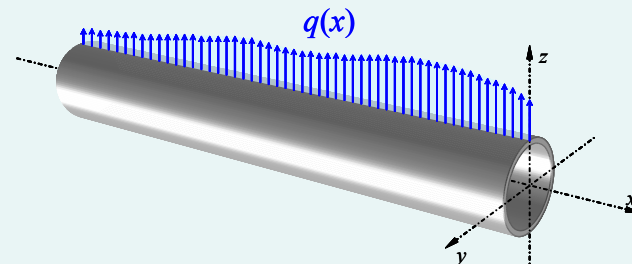


Flexão (Esforços de Flexão)

$$\frac{dM}{dx} - V(x) = 0$$

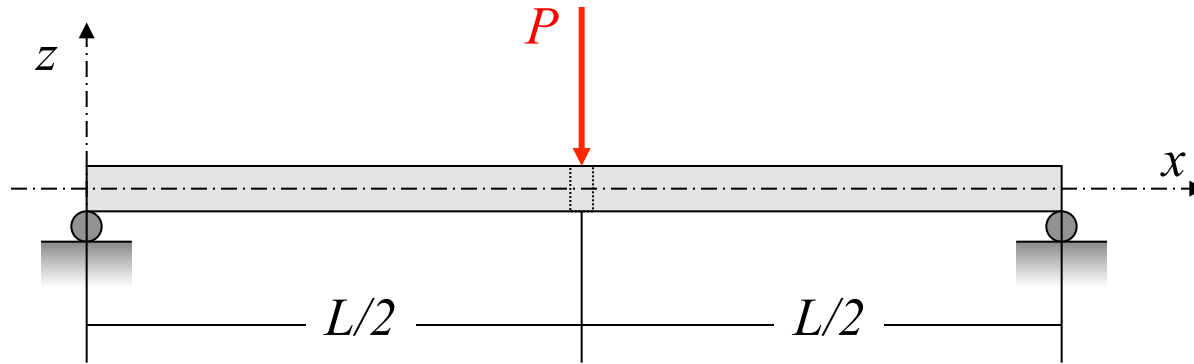
$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0$$

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$



Teoria de Vigas (Ex. 2)

Ex. 2 (flexão): Viga simplesmente apoiada sujeita a carregamento transversal concentrado



$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}, \quad q(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases}$$

A função $q(x)$ não está definida em $x = L/2$

Teoria de Vigas (Ex. 2)

Para $0 < x < L/2$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad w(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Para $L/2 < x < L$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad w(x) = d_1 (L - x)^3 + d_2 (L - x)^2 + d_3 (L - x) + d_4$$

Teoria de Vigas (Ex. 2)

Condições de contorno

$$x = 0$$

$$(i) \quad w(0) = 0$$

$$(ii) \quad M(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0$$

$$x = L$$

$$(iii) \quad w(L) = 0$$

$$(iv) \quad M(L) = 0 \Rightarrow w''(L) = 0$$

Quatro condições de contorno para oito constantes!

Deve-se considerar as condições de continuidade em $x = L/2$

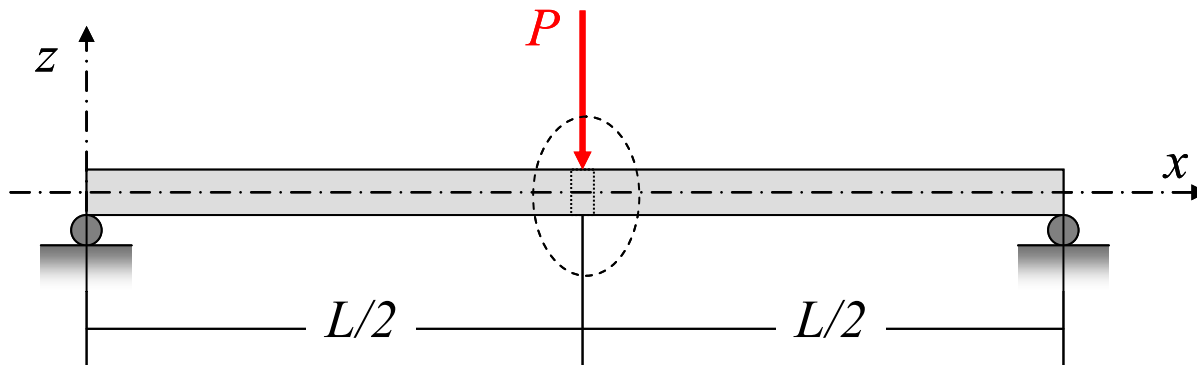
Teoria de Vigas (Ex. 2)

Deslocamentos e rotações devem ser contínuos em $x = L/2$

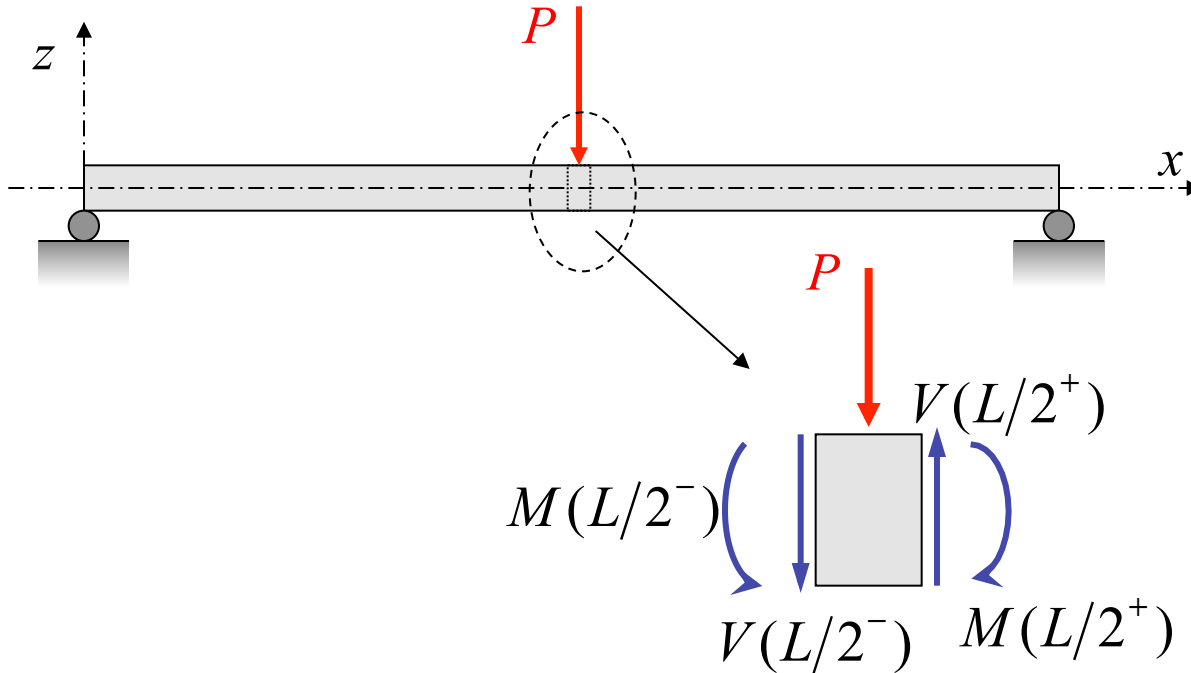
$$w(L/2^+) = w(L/2^-)$$

$$w'(L/2^+) = w'(L/2^-)$$

Condições de continuidade para o esforço cortante e momento fletor são obtidas a partir do equilíbrio de um elemento de volume em torno do ponto $x = L/2$



Teoria de Vigas (Ex. 2)



$$M(L/2^+) - M(L/2^-) = 0 \Rightarrow w''(L/2^+) = w''(L/2^-)$$

$$V(L/2^+) - V(L/2^-) = P \Rightarrow w'''(L/2^+) - w'''(L/2^-) = -P/EI$$

Teoria de Vigas (Ex. 2)

$$(i) \quad w(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$(ii) \quad w''(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$(iii) \quad w(L) = 0 \Rightarrow d_4 = 0$$

$$(iv) \quad w''(L) = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

$$(v) \quad w(L/2^+) = w(L/2^-) \Rightarrow d_1 L^3 / 8 + d_3 L / 2 = c_1 L^3 / 8 + c_3 L / 2$$

$$(vi) \quad w'(L/2^+) = w'(L/2^-) \Rightarrow 3d_1 L^2 / 4 + d_3 = -3c_1 L^2 / 4 - c_3$$

$$(vii) \quad w''(L/2^+) = w''(L/2^-) \Rightarrow 6d_1 L / 2 = 6c_1 L / 2$$

$$(viii) \quad w'''(L/2^+) - w'''(L/2^-) = -P/EI \Rightarrow -6d_1 - 6c_1 = -P/EI$$

Teoria de Vigas (Ex. 2)

Resolvendo para as constantes:

$$(vii) \Rightarrow c_1 = d_1$$

$$(vii) + (v) \Rightarrow c_3 = d_3$$

$$(vii) + (v) + (vi) \Rightarrow 3c_1 L^2 / 4 + c_3 = 0$$

$$(viii) + (vi) \Rightarrow c_1 = P/12EI, \quad \text{e} \quad c_3 = -PL^2/16EI$$

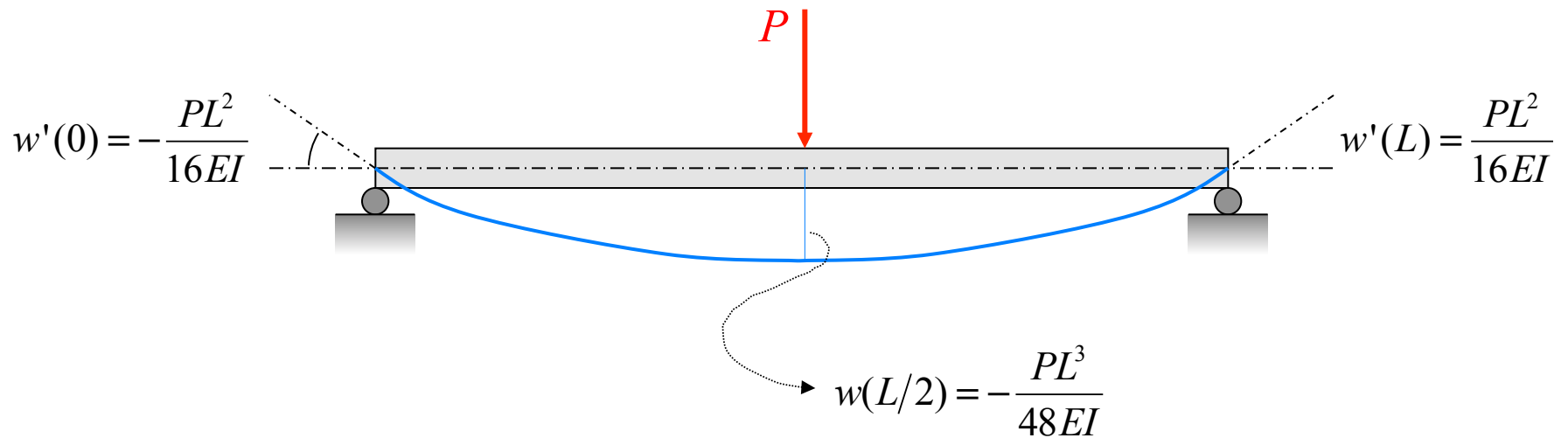
Teoria de Vigas (Ex. 2)

Solução:

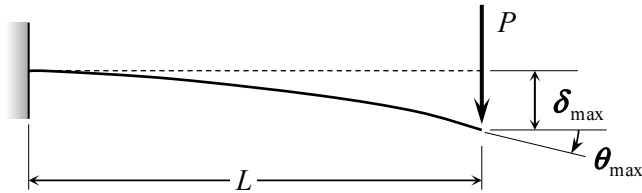
$$w(x) = \begin{cases} -\frac{PL^3}{48EI} \left[3\left(\frac{x}{L}\right) - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right], & 0 < x < L/2 \\ -\frac{PL^3}{48EI} \left[3\left(\frac{L-x}{L}\right) - 4\left(\frac{L-x}{L}\right)^3 \right], & L/2 < x < L \end{cases}$$

$$w'(x) = \begin{cases} -\frac{PL^2}{16EI} \left[1 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right], & 0 < x < L/2 \\ \frac{PL^2}{16EI} \left[1 - 4\left(\frac{L-x}{L}\right)^2 \right], & L/2 < x < L \end{cases}$$

Teoria de Vigas (Ex. 2)

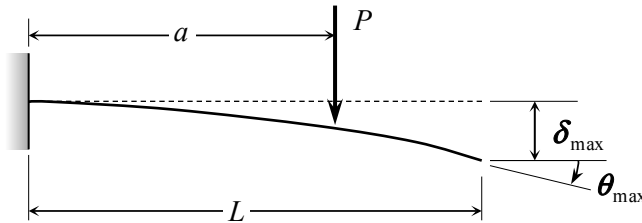


Resultados Tabelados



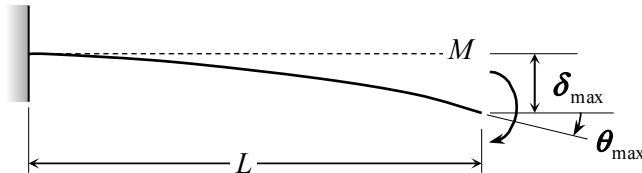
$$\delta(x) = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$$

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_{\max} = \frac{PL^2}{2EI}$$



$$\theta_{\max} = \frac{PL^2}{2EI}$$

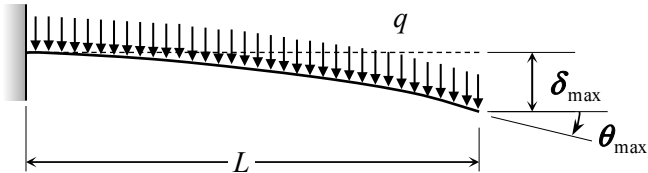
$$\delta_{\max} = \frac{Pa^2(3L - a)}{6EI} \quad \theta_{\max} = \frac{Pa^2}{2EI}$$



$$\delta(x) = \frac{Mx^2}{2EI}$$

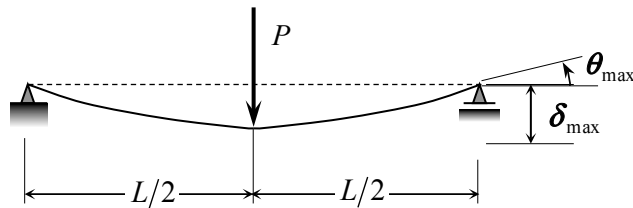
$$\delta_{\max} = \frac{ML^2}{2EI} \quad \theta_{\max} = \frac{ML}{EI}$$

Resultados Tabelados



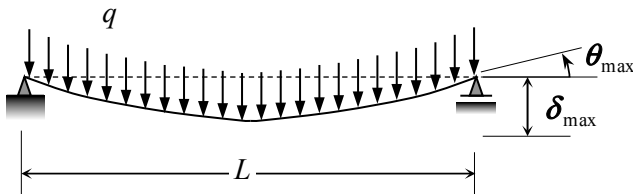
$$\delta(x) = \frac{qx^2}{24EI} (x^2 + 6L^2 - 4Lx)$$

$$\delta_{\max} = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_{\max} = \frac{qL^3}{6EI}$$



$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{P}{48EI} (3L^2x - 4x^3), & x < L/2 \\ \frac{P}{6EI} \left(3L^2x - 4x^3 + 8\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 \right), & x > L/2 \end{cases}$$

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} \quad \theta_{\max} = \frac{PL^2}{16EI}$$



$$\delta(x) = \frac{qx^2}{24EI} (L^2 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$\delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_{\max} = \frac{qL^3}{24EI}$$