

Departamento de Engenharia Mecânica



Mecânica dos Sólidos II

Parte 1 (Revisão)

Prof. Arthur M. B. Braga

ENG 1704 – Mecânica dos Sólidos II

- Prof. Arthur M. B. Braga
 - Secretaria do DEM ou Lab de Sensores a Fibra Óptica
 - E-Mail: abraga@puc-rio.br
 - Tel: 3527-1181
- Aulas: 2a e 6as – 07:00-09:00 – Sala 210L
- Notas de aula:
<http://abraga.usuarios.rdc.puc-rio.br/mecsol2/mecsol2.html>
- Textos
 - **J. M. Gere, *Mecânica dos Materiais*, Thomson**
 - S. H. Crandall, N. C. Dahl, and T. J. Lardner, *An Introduction to The Mechanics of Solids*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1978
 - T. J. Lardner and R. R. Archer, *Introduction to Solid Mechanics*, McGraw-Hill, 1994

Critério de Avaliação

Critério 6:

$$NF = \frac{G1 + G2}{2}$$

Se **G1** e **G2** $\geq 3,0$ e **NF** $\geq 5,0$ então **MÉDIA** = **NF**

Em outros casos o aluno faz **G3**:

Se **G1** e **G2** $\geq 3,0$ ou **G1** ou **G2** $< 3,0$ e **G3** $\geq 3,0$, então:

$$MÉDIA = \frac{Gm + Gn}{2}$$

Gm e **Gn** são as duas maiores notas entre **G1**, **G2** e **G3**

Se **G1** ou **G2** $< 3,0$ e **G3** $< 3,0$, então:

$$MÉDIA = \frac{G1 + G2 + 2 * G3}{4}$$

Data das Provas

- **P1:** Segunda-feira, 29 de setembro
- **P2:** Segunda-feira, 17 de novembro
- **P3:** Sexta-feira, 30 de novembro

Ementa

ENG1704 - MECÂNICA DOS SÓLIDOS II

Deslocamento de vigas retas devido à flexão. Relação momento-curvatura. Flambagem de colunas. Condições de estabilidade. Critérios de falha por flambagem. Métodos de energia. Teorema de Castigliano. Teorema dos trabalhos mínimos. Introdução ao método dos elementos finitos. Vigas curvas. Deslocamentos sob diversas formas de solicitação. Cilindros de paredes grossas. Discos girantes. Flexão oblíqua. Centro de cisalhamento. Vigas sobre funções elásticas.

Programa

- Estado de tensão em um ponto (revisão)
- Introdução à teoria da elasticidade
 - Equações de equilíbrio (revisão)
 - Relação entre deslocamentos e deformações (revisão)
 - Relações constitutivas (revisão)
- Deformações em vigas
- Cilindros de paredes grossas
- Comportamento além do regime elástico (carga limite)
- Flambagem (instabilidade elástica)
- Vigas curvas
- Métodos de energia (Teorema de Castigliano)
- Tópicos avançados

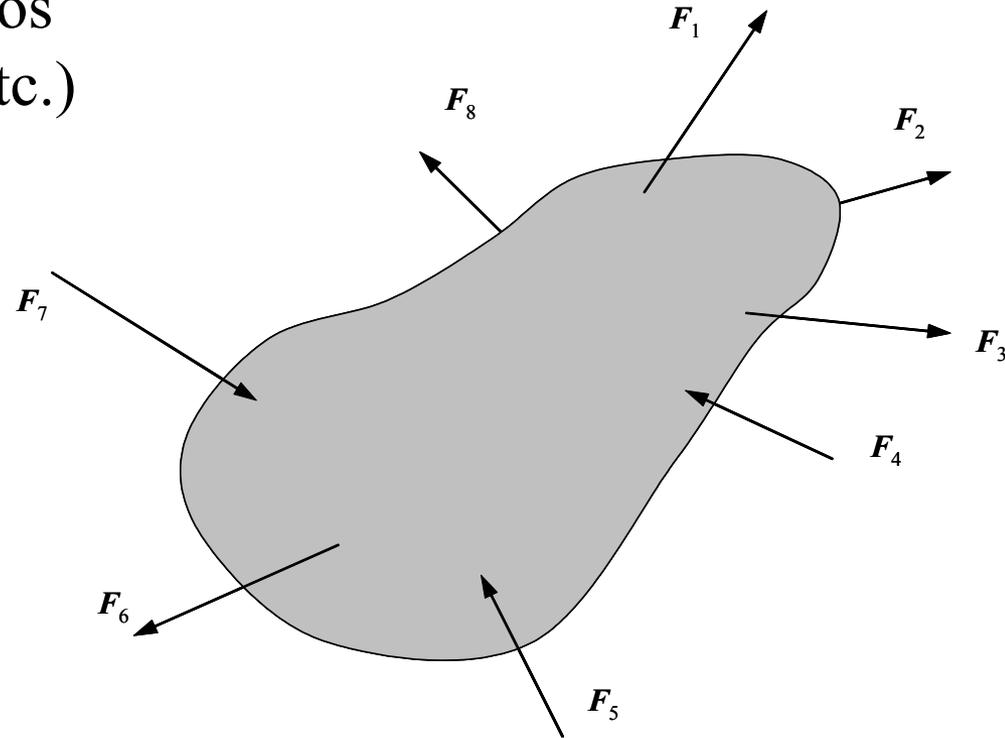
Mecânica dos Sólidos

Problema

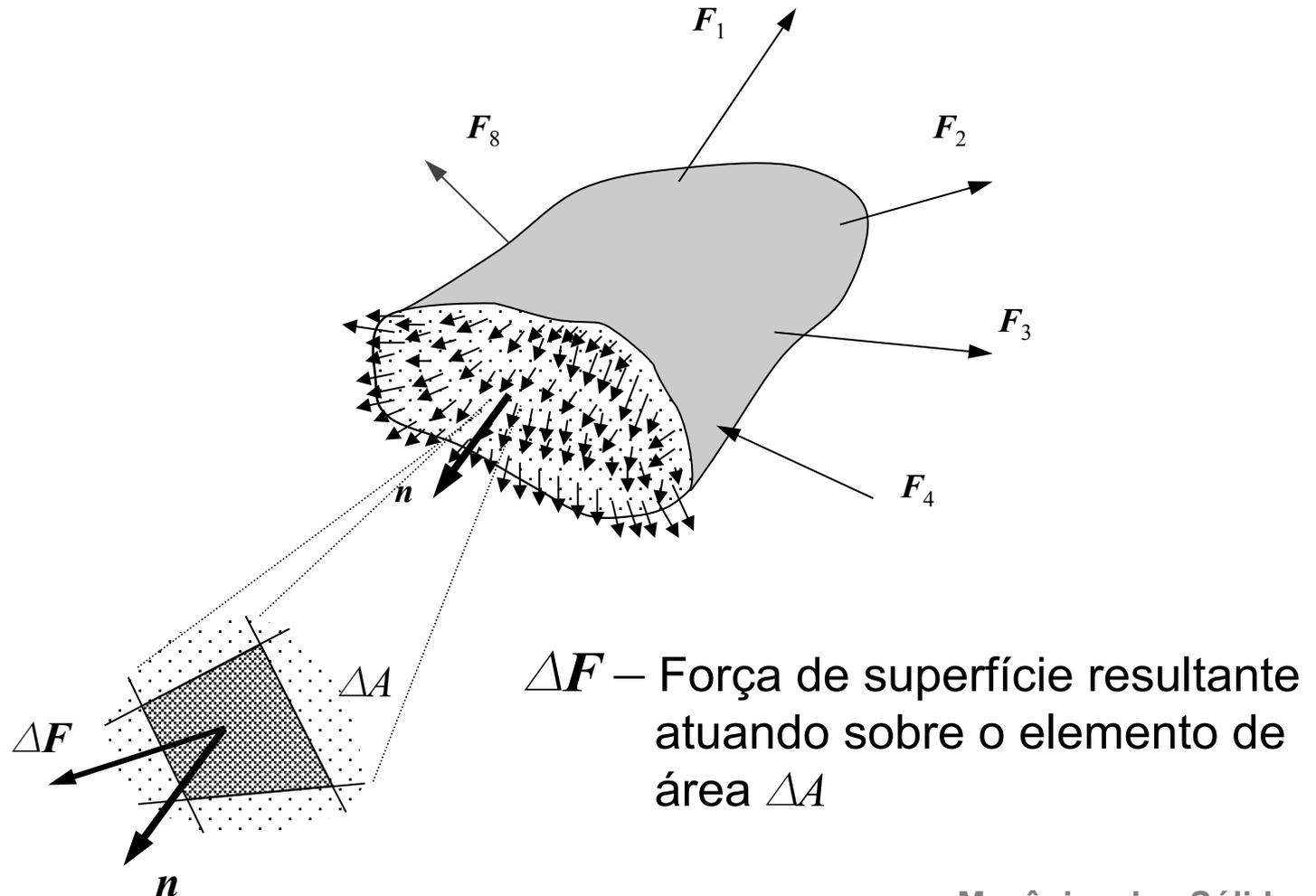
Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

Determinar

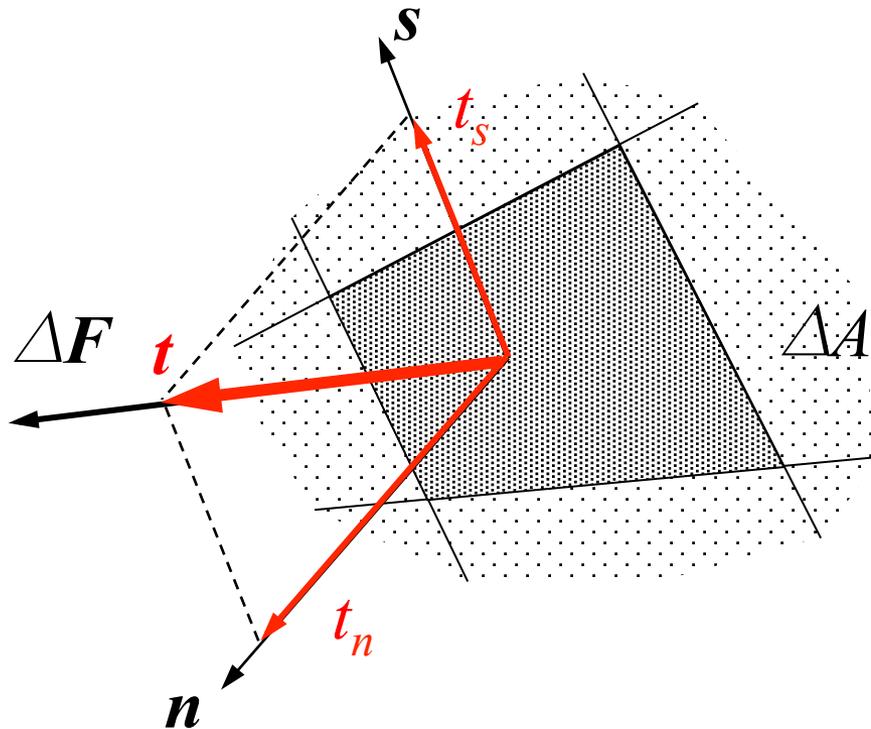
- Esforços internos (tensões)
- Deformações
- Deslocamentos



Corpo em equilíbrio sujeito à ação de um conjunto de forças externas



Definição do *Vetor Tensão*



Vetor tensão

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$$

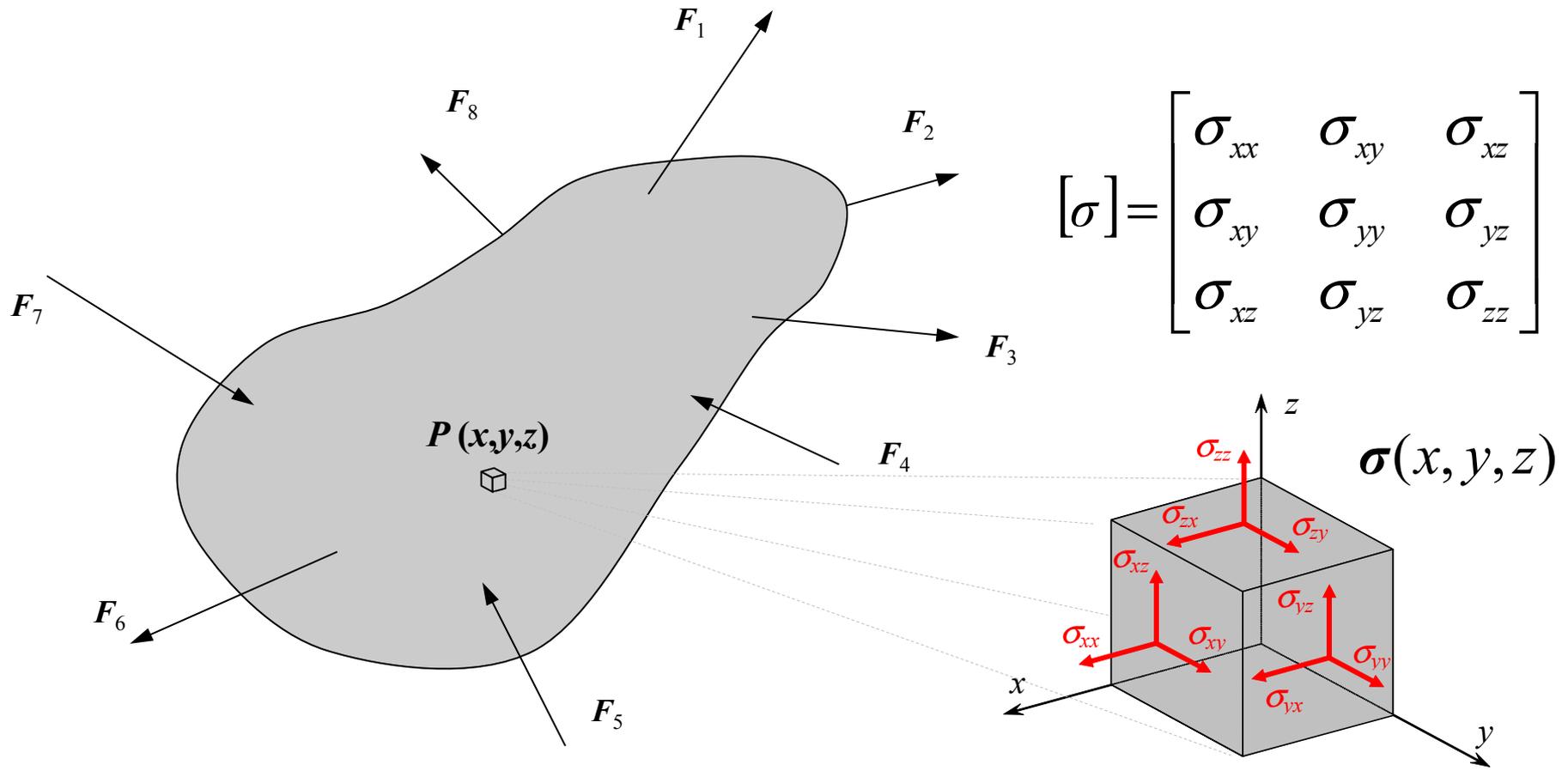
Componente normal
(tensão normal)

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$$

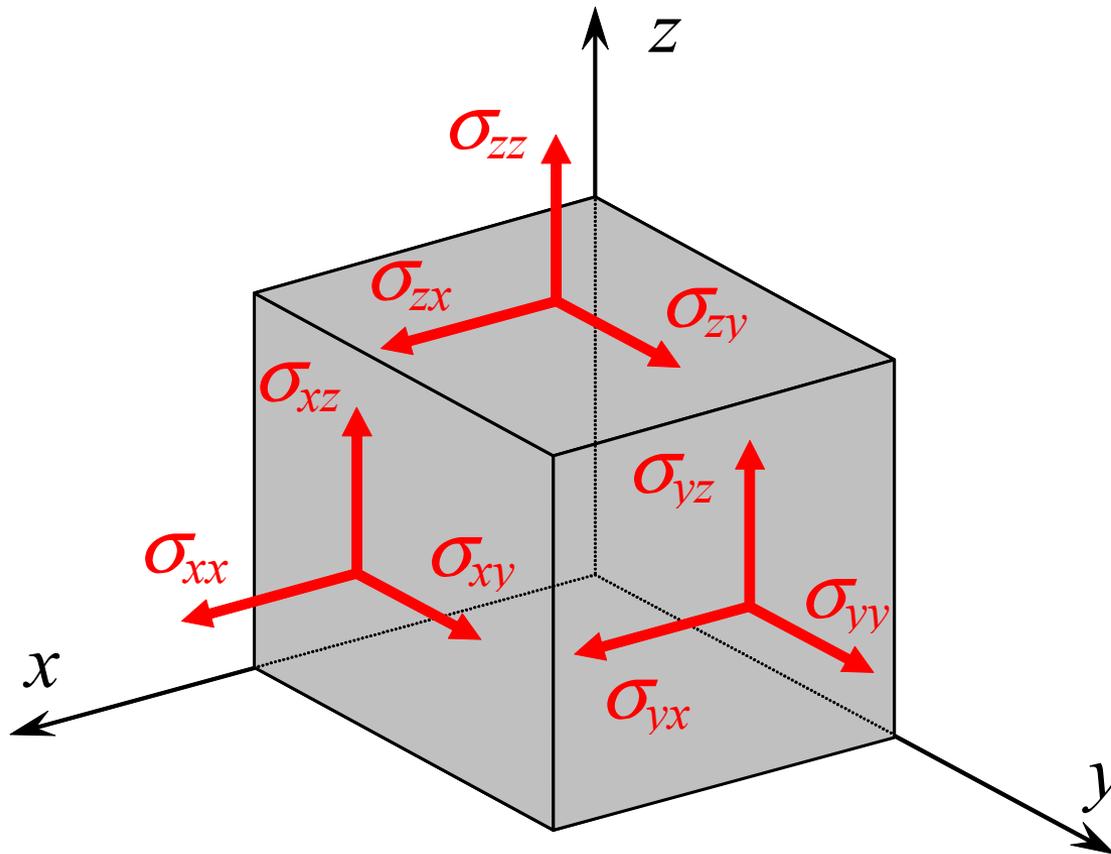
Componente tangencial
(tensão cisalhante)

$$t_s = |\mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|$$

Determinação da Distribuição de Tensão no Corpo Sujeito à Ação de Forças Externas



Representação Gráfica do Estado de Tensão no Ponto (Paralelepípedo Fundamental)



Estado de Tensão em um Ponto

- Tensão é uma grandeza tensorial: $[\sigma]$, ou σ , é chamado o **tensor de tensões**
- Pode-se mostrar que o tensor de tensões é simétrico, ou seja, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, e $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Logo, $[\sigma]$ possui apenas seis componentes independentes!
- Pode-se mostrar que a simetria do tensor de tensões é necessária para que o balanço de momentos em torno do ponto (balanço da quantidade de movimento angular) seja satisfeito.
- Uma vez conhecidas as seis componentes independentes do *tensor de tensões*, pode-se determinar o vetor tensão atuando sobre qualquer plano que passa pelo ponto.

Estado de Tensão em um Ponto

O *vetor tensão* associado à direção cuja normal é \mathbf{n} , pode então ser calculado a partir do *tensor de tensões*:

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

em notações mais concisas:

$$\{t^{(n)}\} = [\sigma]\{n\} \quad \text{ou} \quad \mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Tensões Principais e Planos Principais

Dado o estado de tensão num ponto, os planos principais são definidos como aqueles planos onde a componente tangencial (cisalhante) do vetor tensão é nula

A equação abaixo relaciona o vetor tensão atuando sobre um plano definido pela normal \mathbf{n} com o tensor de tensões:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

ou, em forma matricial:

$$\{t^{(n)}\} = [\sigma] \{n\}$$

Tensões Principais e Planos Principais

Deseja-se determinar os planos definidos pelas suas normais \mathbf{n} , tais que os vetores tensão atuando sobre eles têm a forma:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lambda \mathbf{n}$$

Substituindo-se esta expressão na equação da tela anterior, obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

ou em forma matricial:

$$[\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\} = \lambda\{\mathbf{n}\}$$

Tensões Principais e Planos Principais

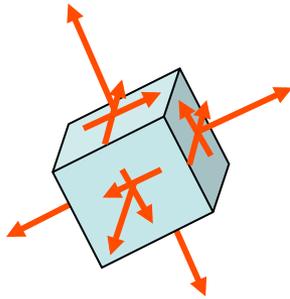
Portanto, a determinação dos planos principais fica reduzida à solução de um problema de autovalores:

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n}$$

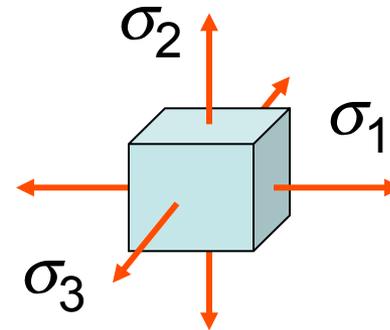
- Os autovetores do tensor de tensão definem os planos (direções) principais.
- Os autovalores do tensor de tensão, l , são as **tensões principais**.

Tensões Principais

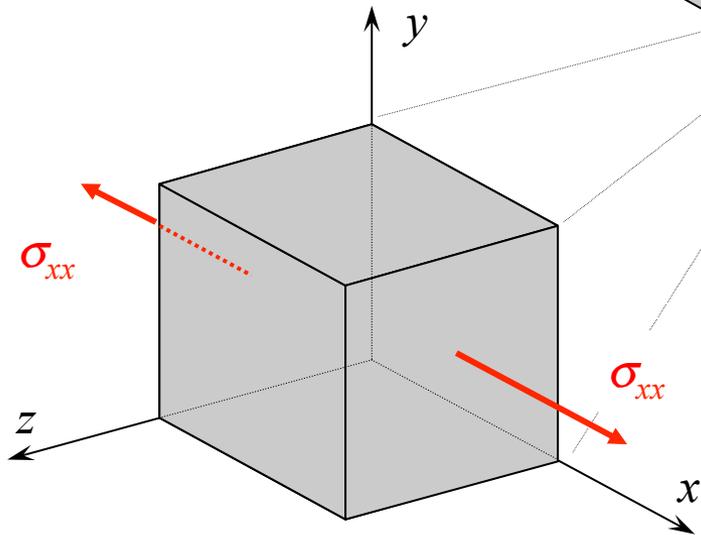
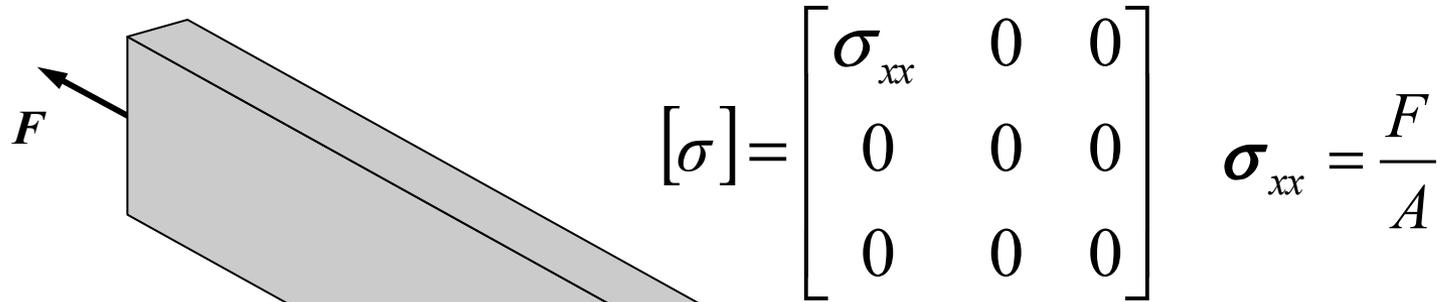
Estado 3D de tensão



Tensões Principais

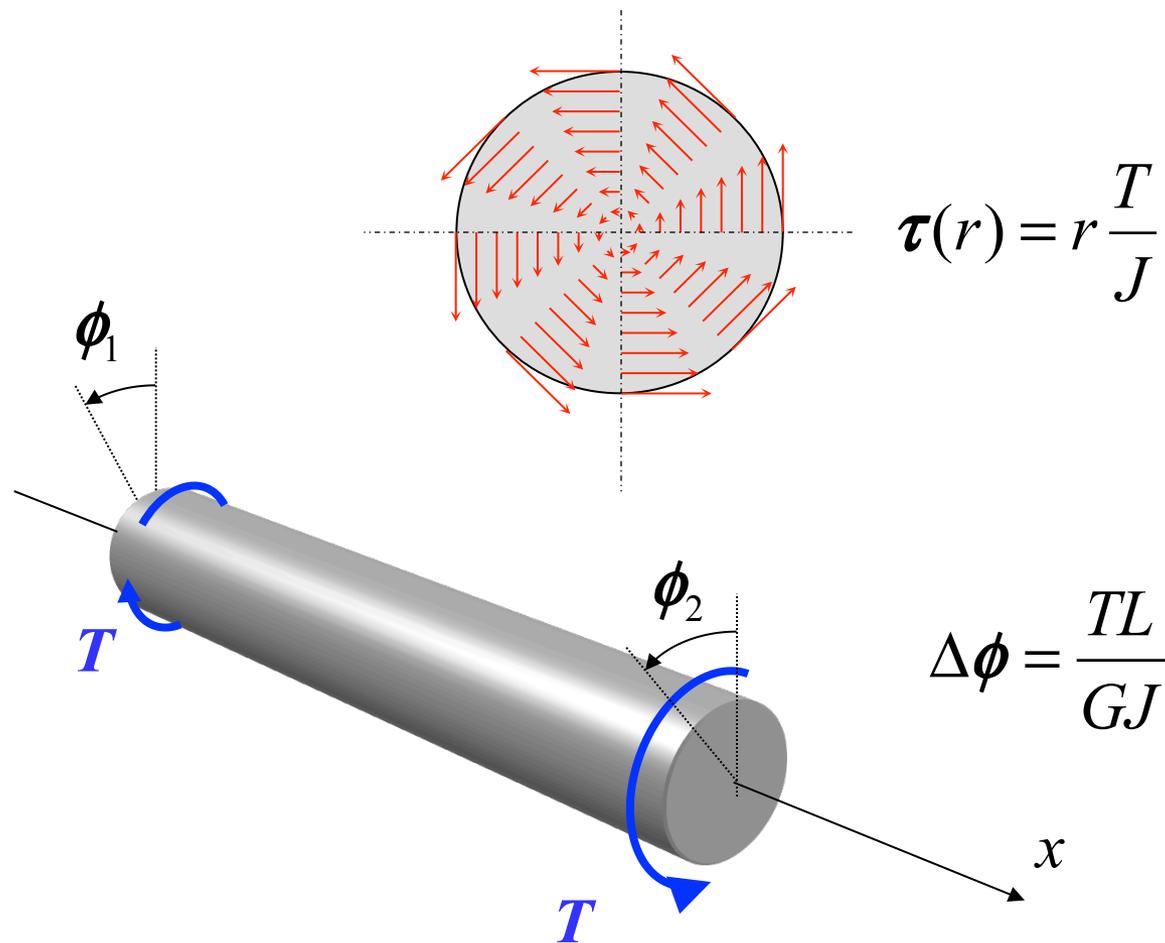


Barras Carregadas Axialmente

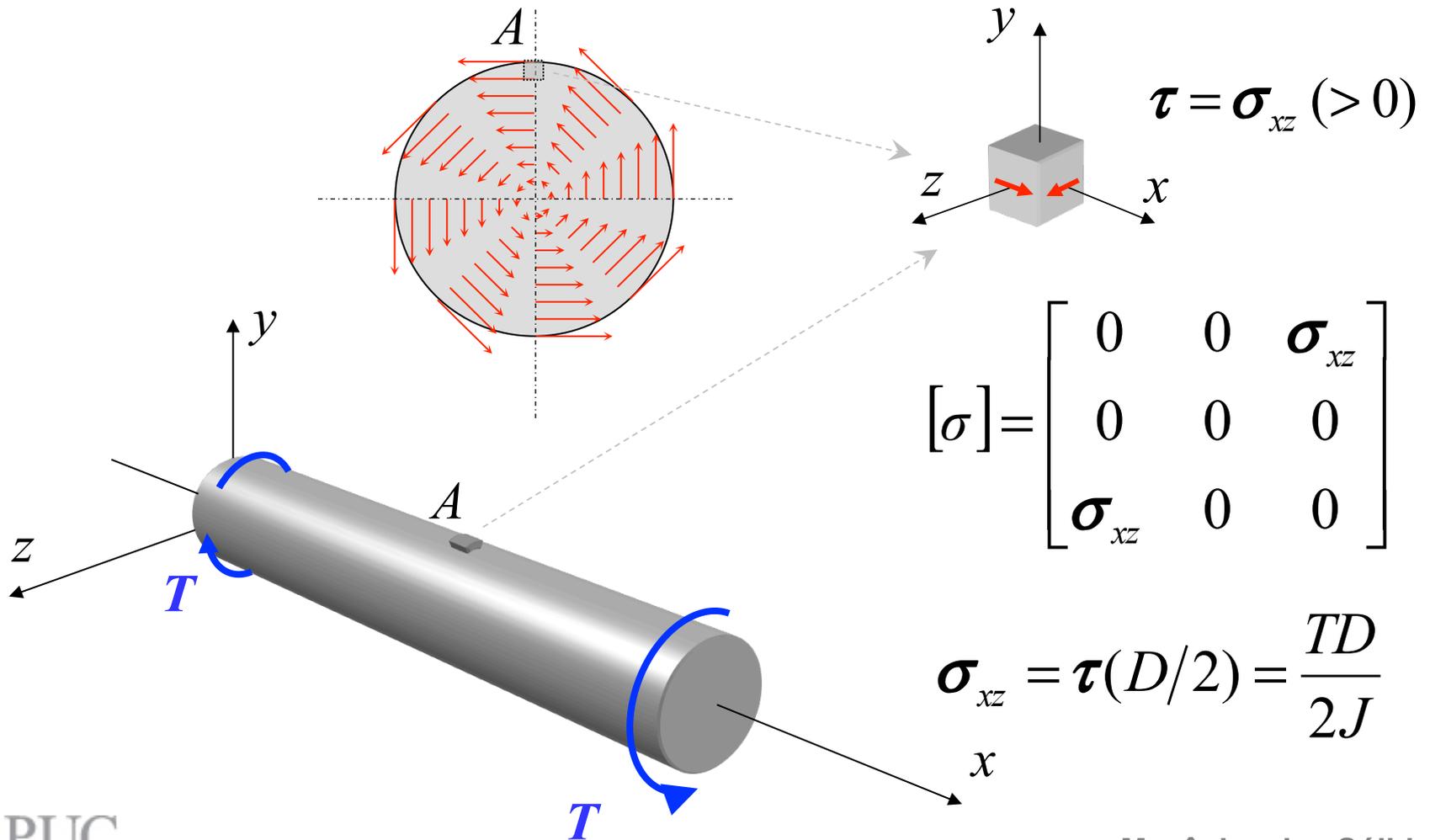


$$\Delta L = \frac{FL}{EA}$$

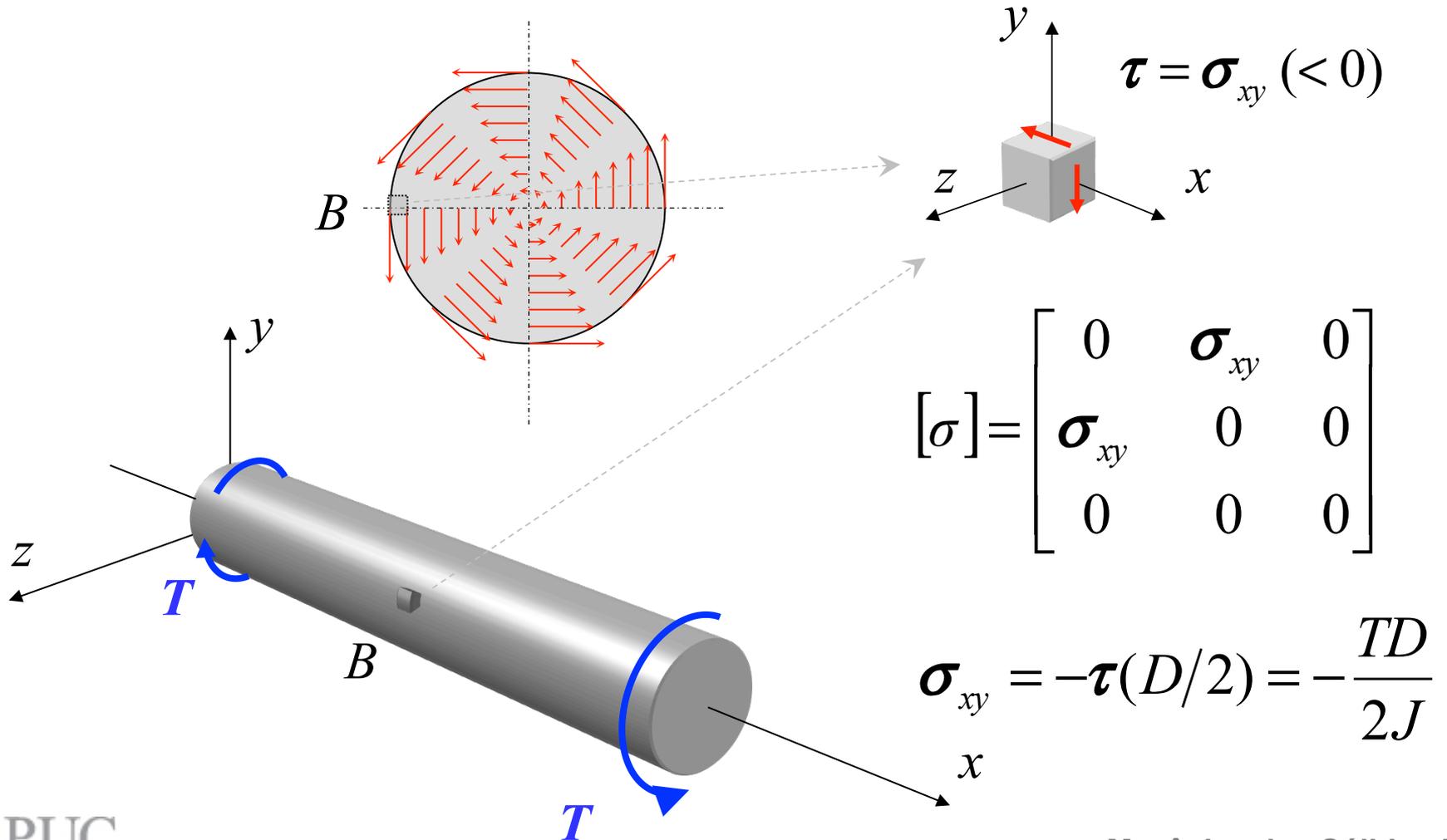
Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção



Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção

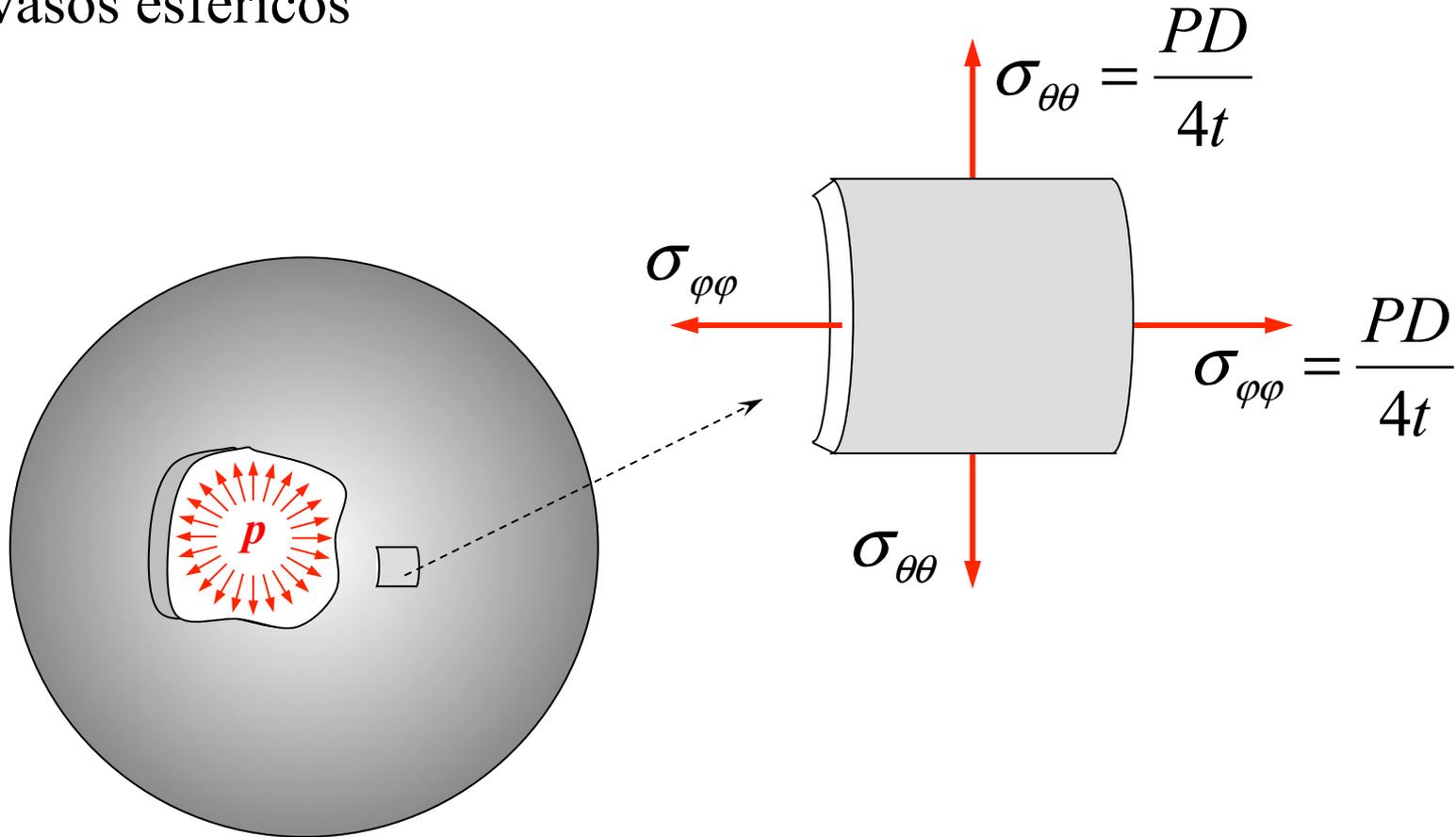


Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção



Vasos de Pressão de Paredes Finas ($D \gg t$)

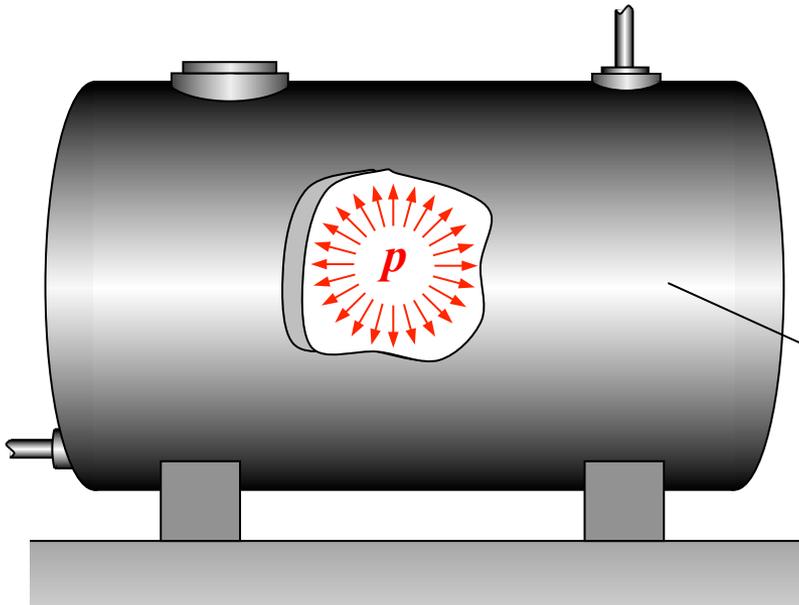
Vasos esféricos



Vasos de Pressão (*pressão interna*)

Vasos Cilíndricos ($D/t \gg 1$)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



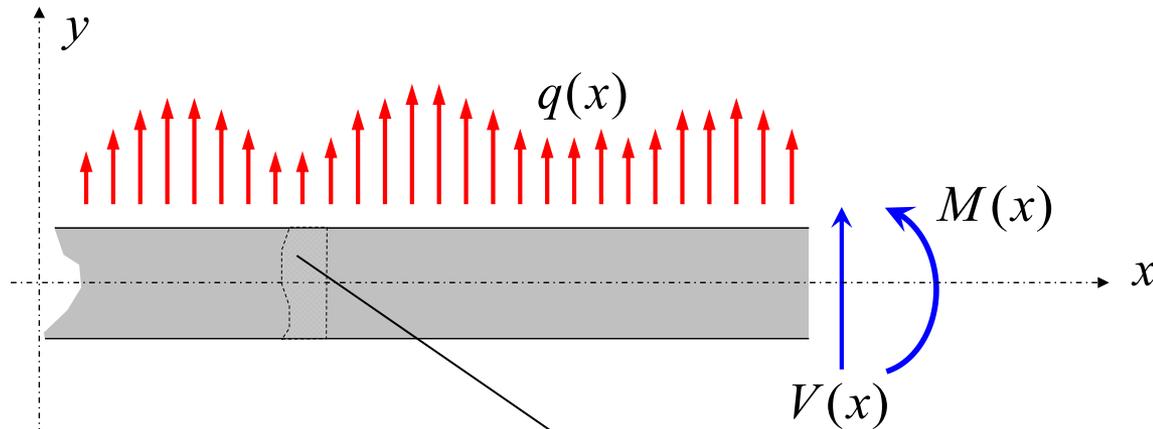
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pD}{2t}$$

A grey square stress element is shown with four red arrows pointing outwards from its center: one pointing up, one pointing down, one pointing left, and one pointing right. To the right of the element is the equation $\sigma_{zz} = \frac{pD}{4t}$.

$$\sigma_{zz} = \frac{pD}{4t}$$

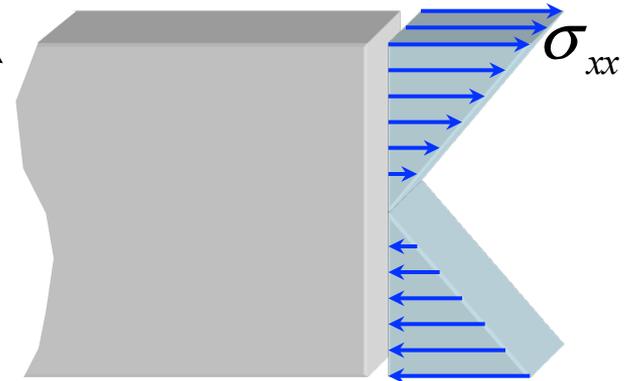
Flexão de Vigas

Tensões Normais de Flexão



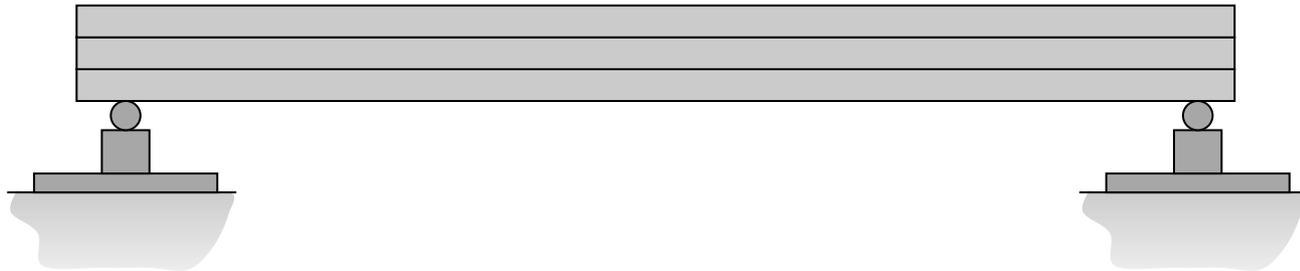
$$[\sigma(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = -y \frac{M(x)}{I}$$



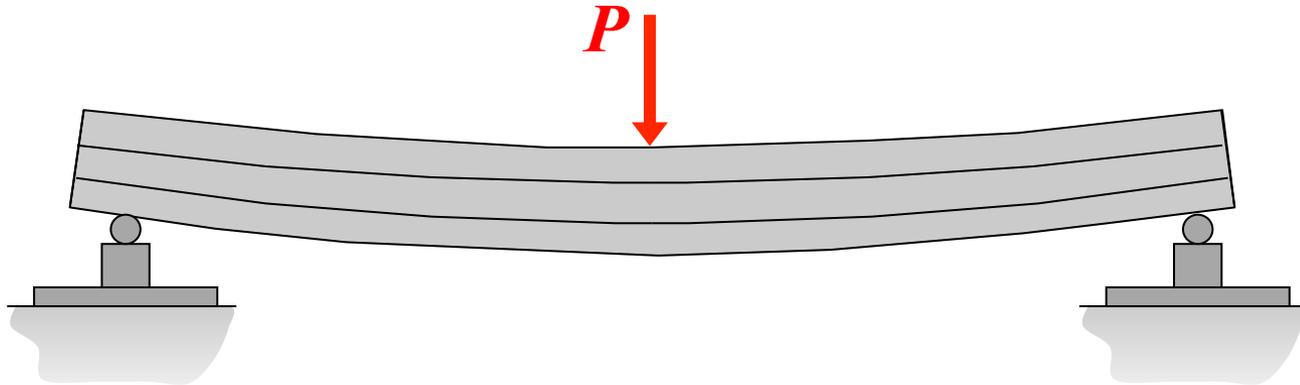
Flexão de Vigas

Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Flexão de Vigas

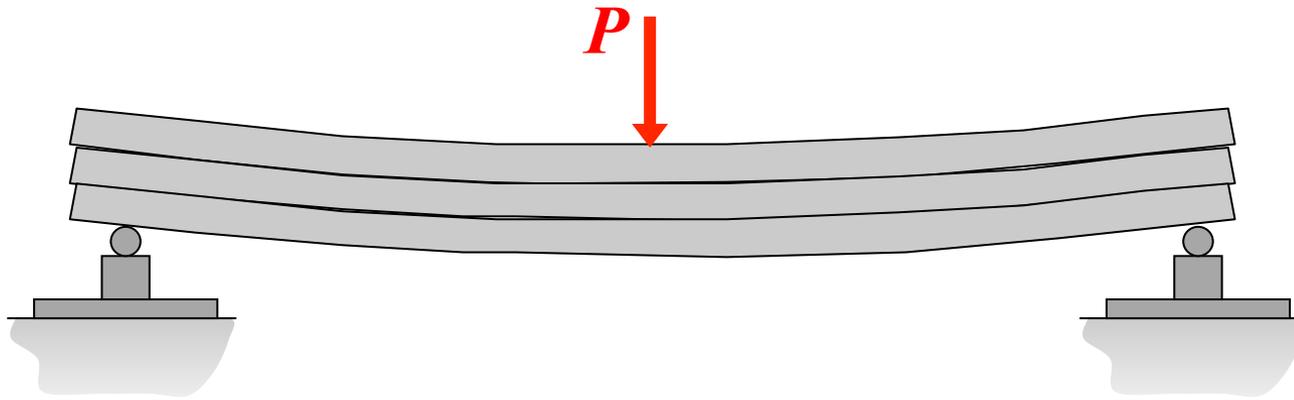
Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Lâminas “Coladas”

Flexão de Vigas

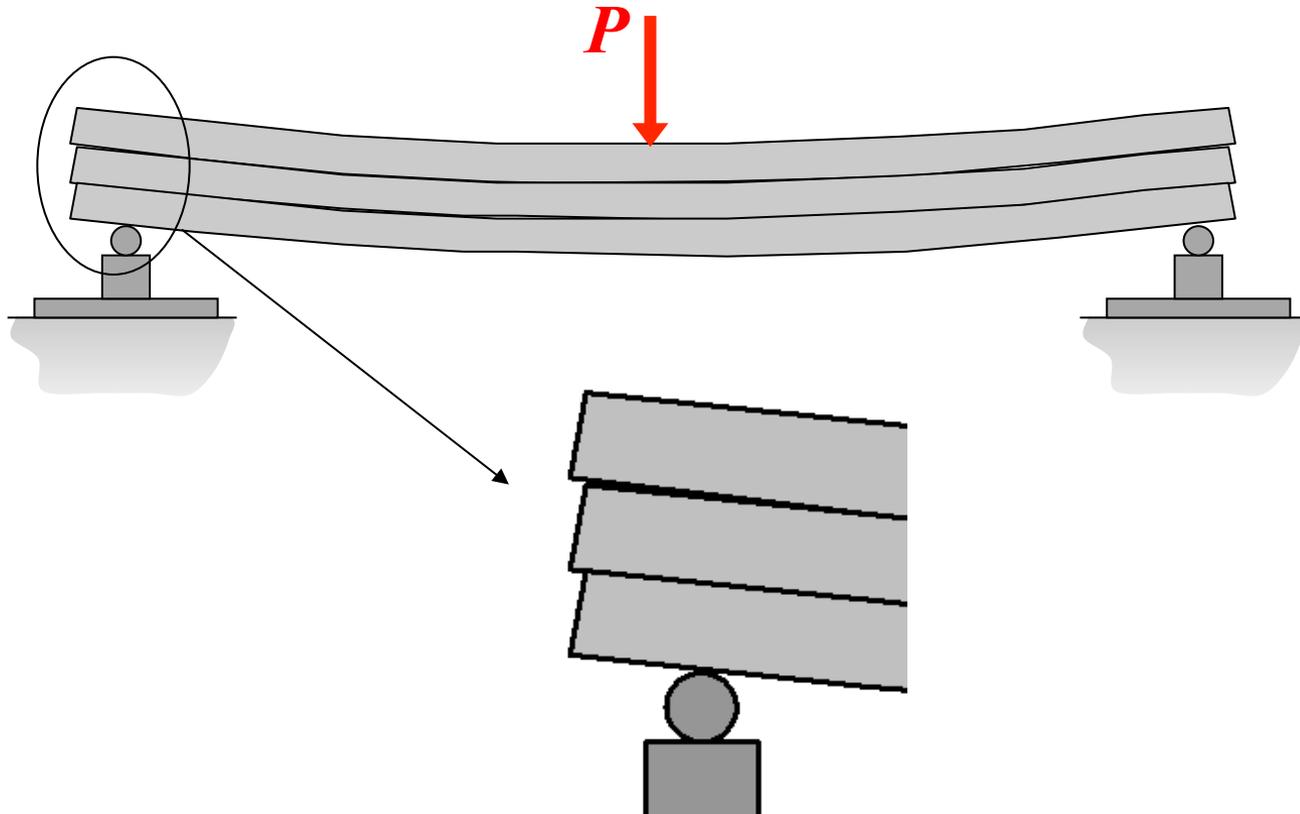
Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Lâminas Independentes

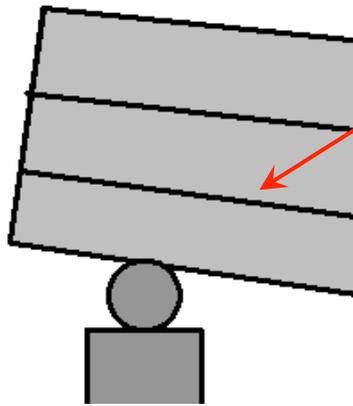
Flexão de Vigas

Tensões de Cisalhamento devido à flexão



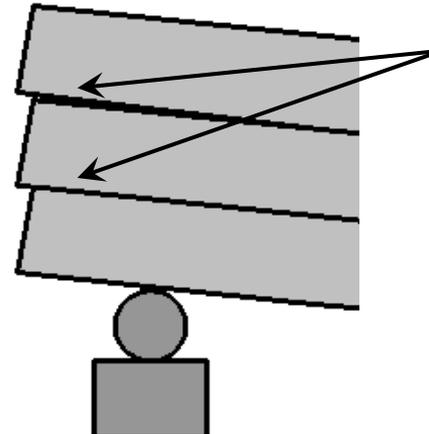
Flexão de Vigas

Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Tensões de cisalhamento horizontais impedem o deslizamento entre as lâminas

Lâminas “Coladas”

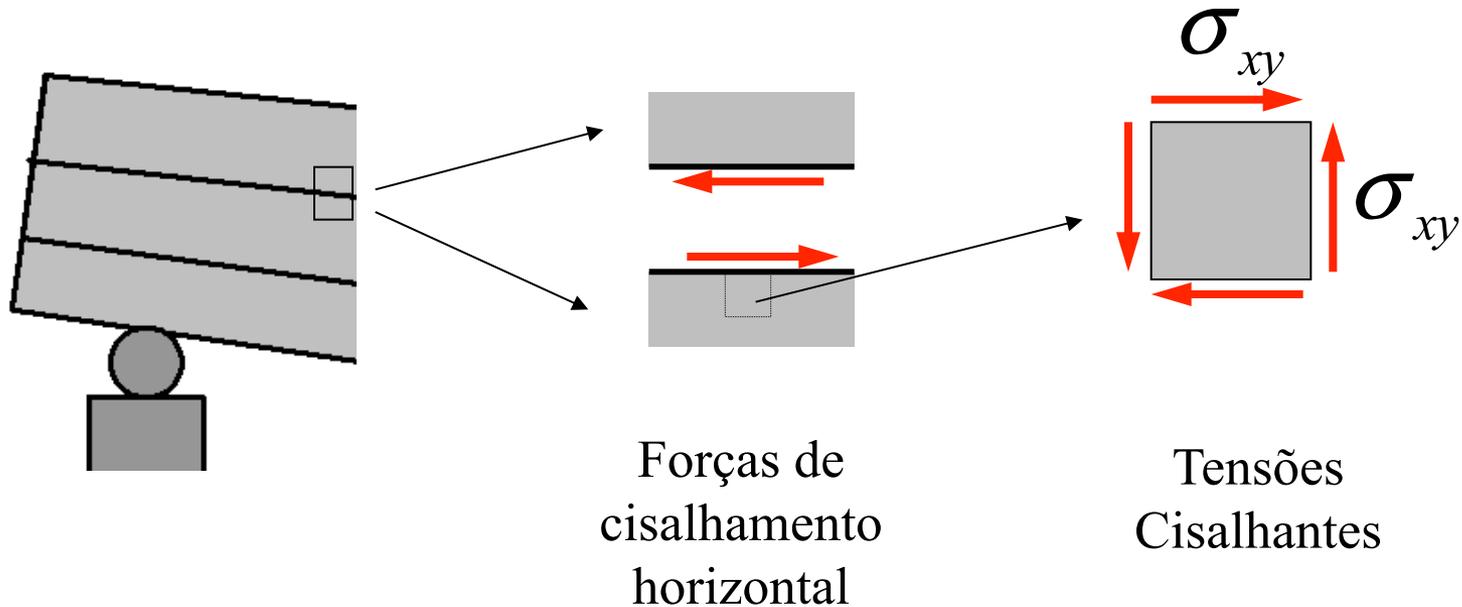


Lâminas deslizam umas sobre as outras

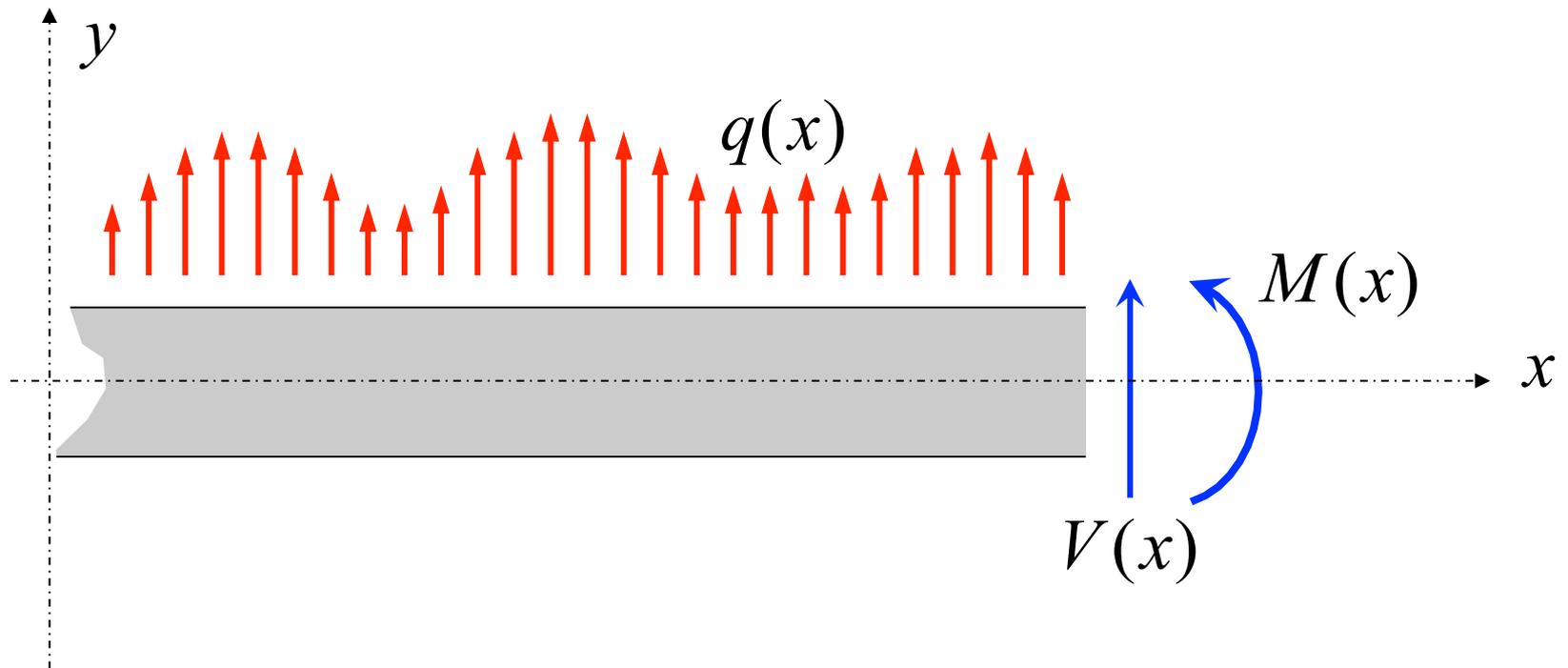
Lâminas Independentes

Flexão de Vigas

Tensões de Cisalhamento devido à flexão

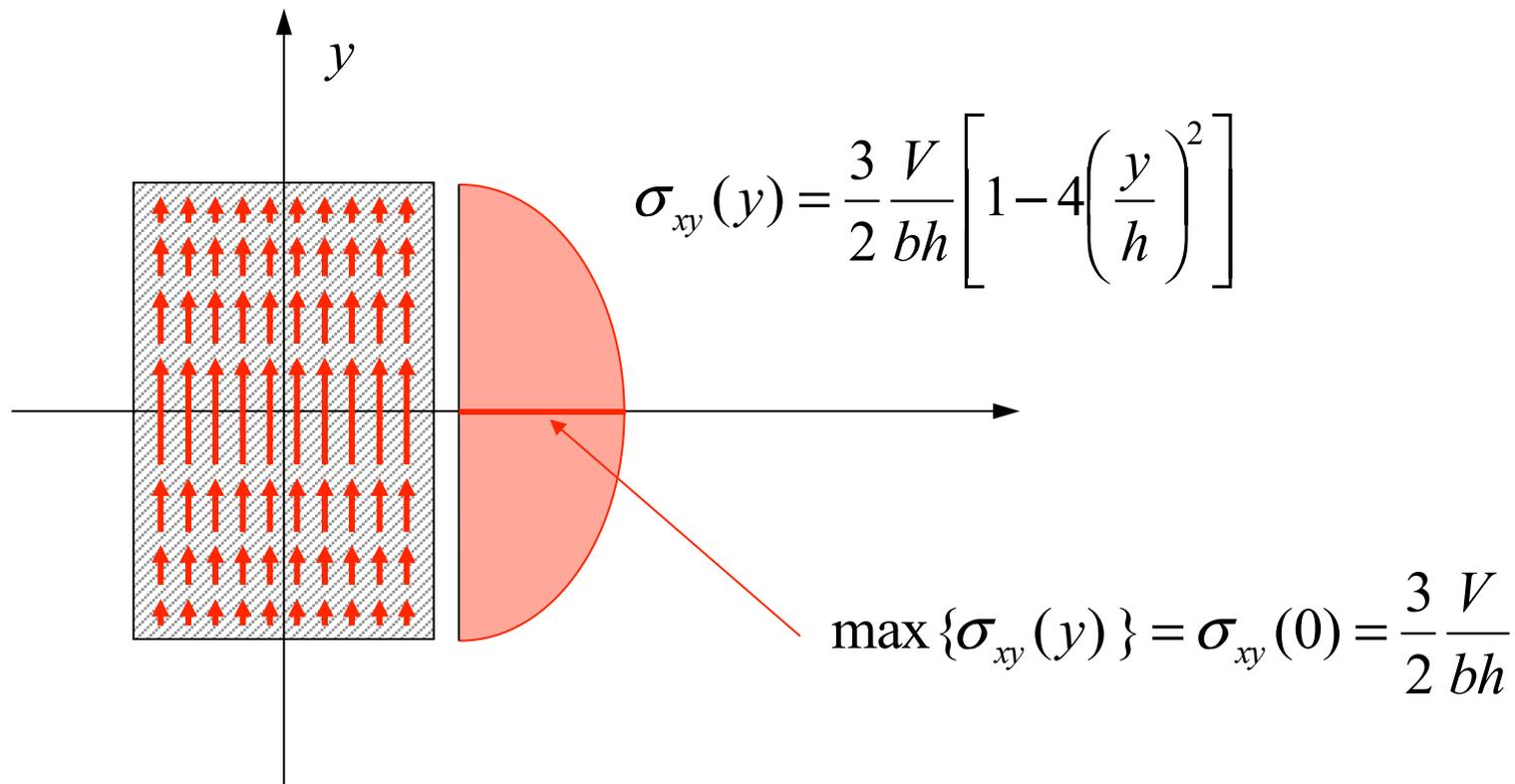


Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão



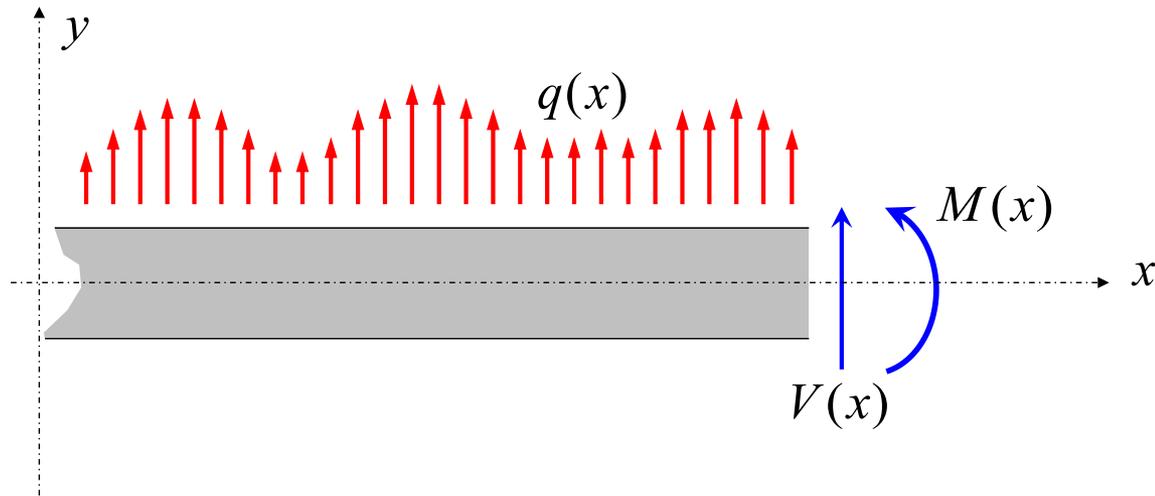
Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Viga de seção retangular:



Flexão de Vigas

Tensões produzidas pela flexão

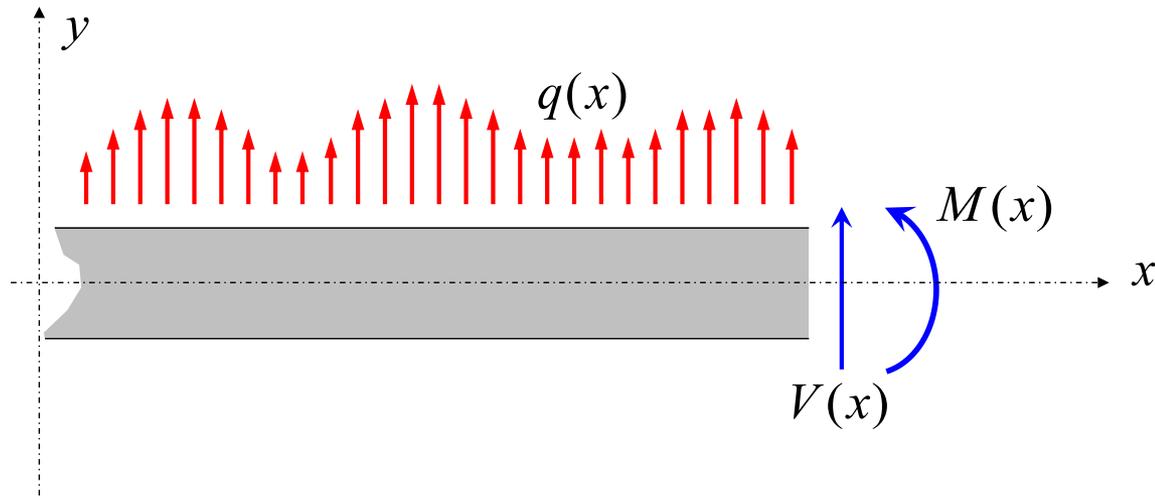


$$[\sigma(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & \sigma_{xy}(x, y) & 0 \\ \sigma_{xy}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= -y \frac{M(x)}{I} \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{3}{2} \frac{V(x)}{bh} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Seção Retangular

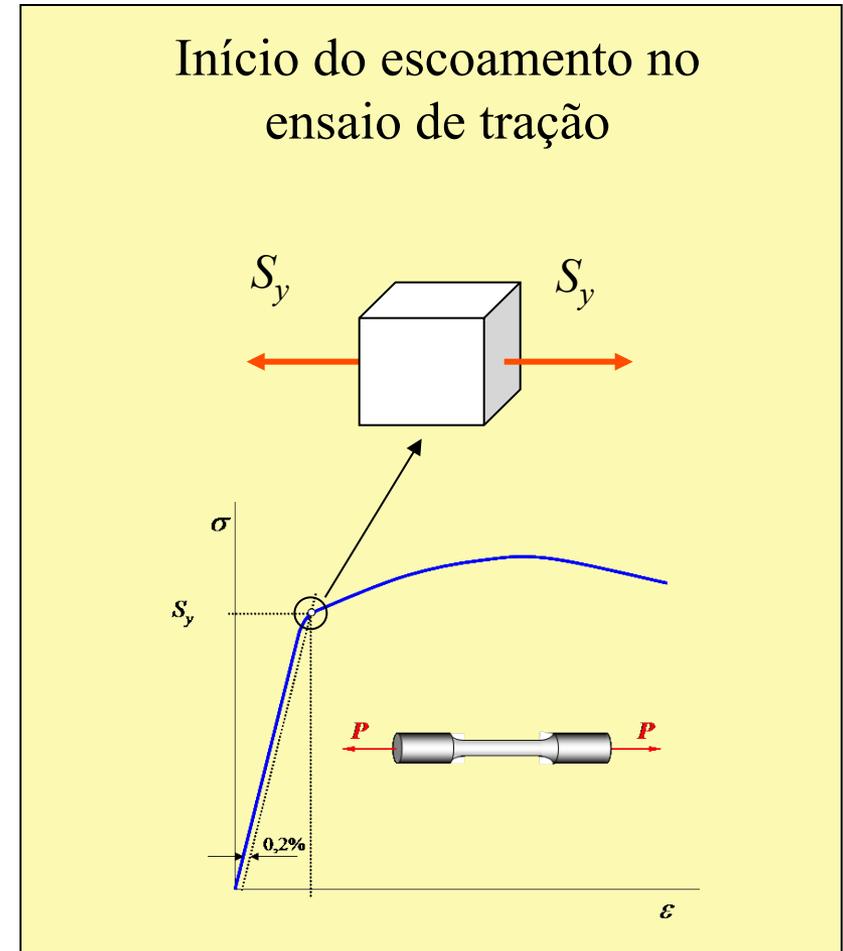
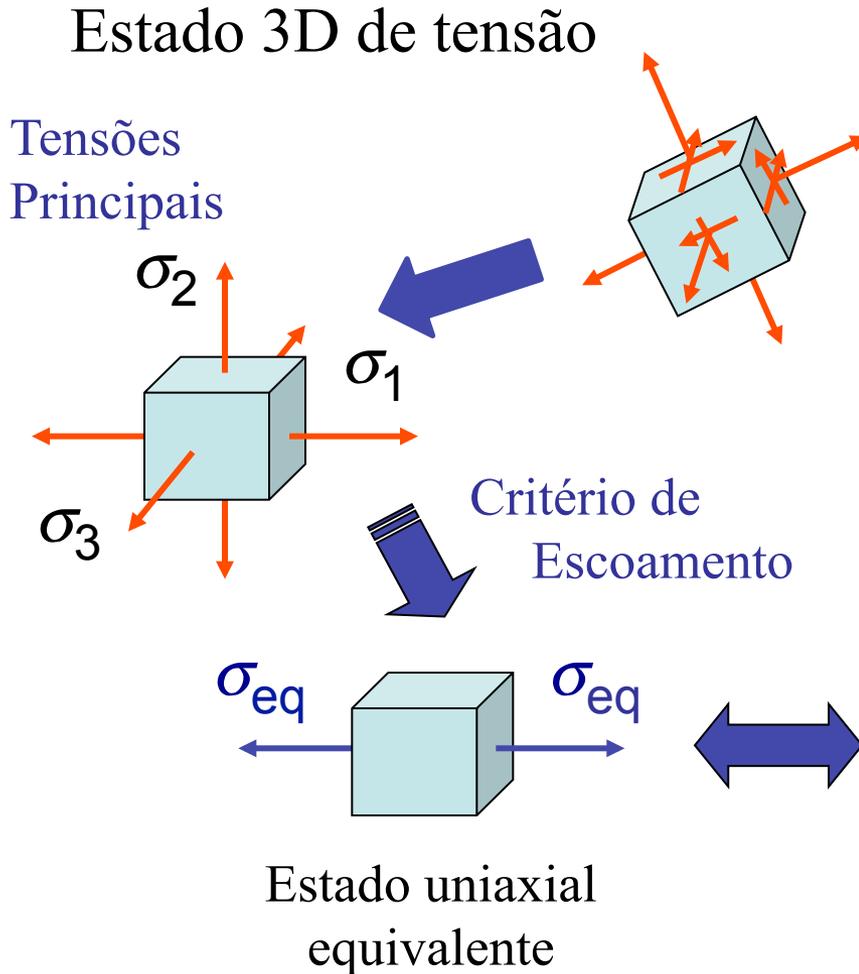
Flexão de Vigas

Tensões produzidas pela flexão



Para $L \gg h$: $\max\{\sigma_{xx}\} \gg \max\{\sigma_{xy}\}$

Critérios de Falha por Escoamento



Critérios de Falha por Escoamento

Critério de von Mises

Tensão de von Mises

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}$$

De acordo com o critério de von Mises, o material se comporta elasticamente quando

$$\sigma_{VM} < S_y$$

Critérios de Falha por Escoamento

Critério de Tresca (Máxima Tensão Cisalhante)

Deformações plásticas ocorrem num ponto do material quando a máxima tensão cisalhante atinge o valor da máxima tensão cisalhante que causa o início do escoamento no ensaio de tração

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < \frac{S_y}{2}$$

Critérios de Falha por Escoamento

Critério de Tresca (Máxima Tensão Cisalhante)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{S_Y/2}{n_S} \quad \text{onde } n_S > 1$$

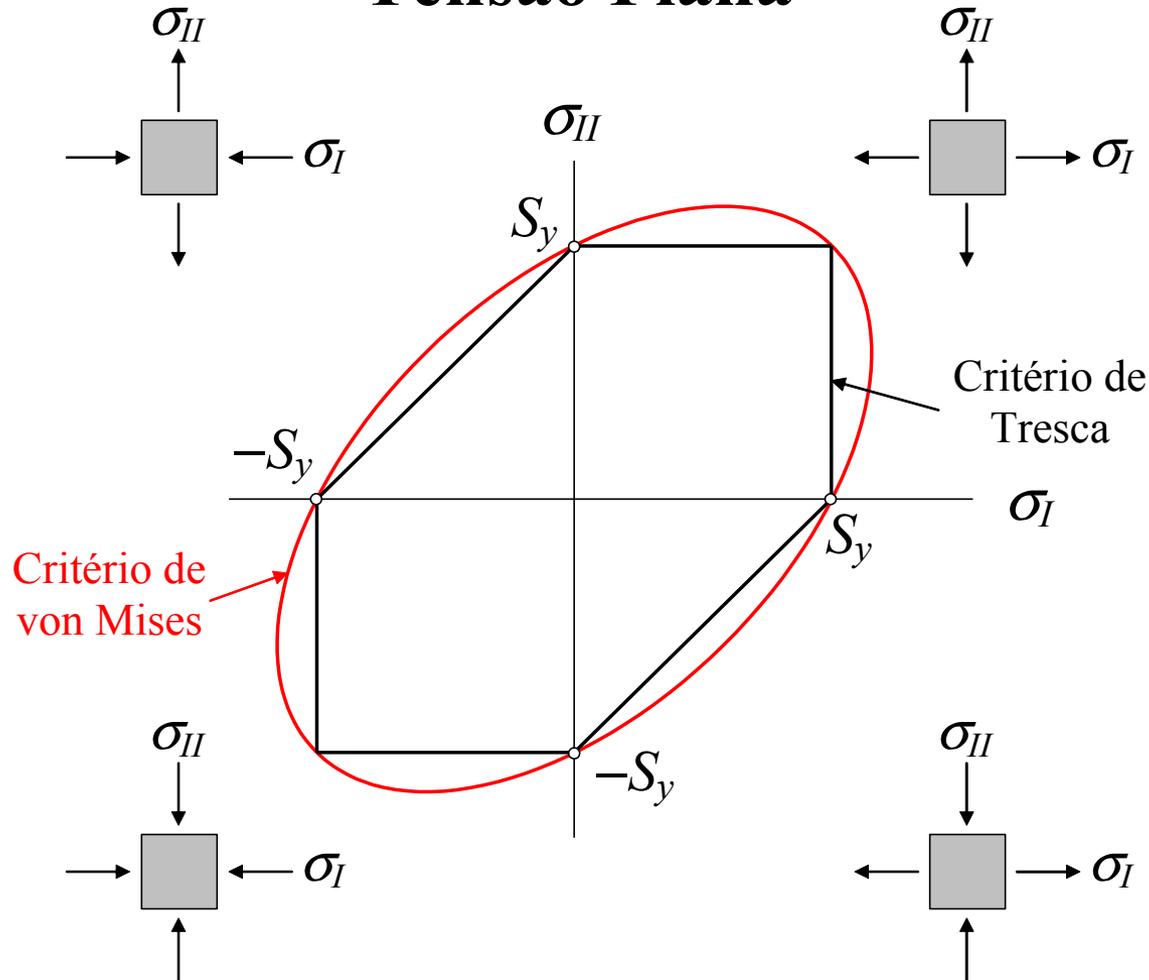
Critério de von Mises

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2]} = \frac{S_Y}{n_S}$$

Onde n_S é o Coeficiente de Segurança (maior do que 1)

Critérios de Falha por Escoamento

Tensão Plana



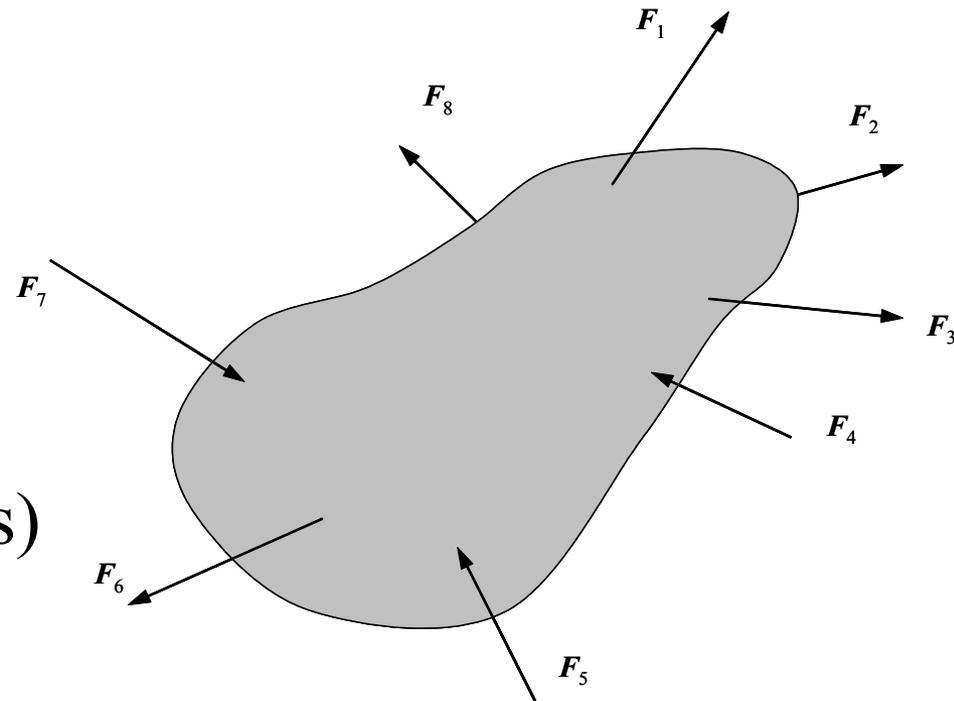
Teoria da Elasticidade

Problema

Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

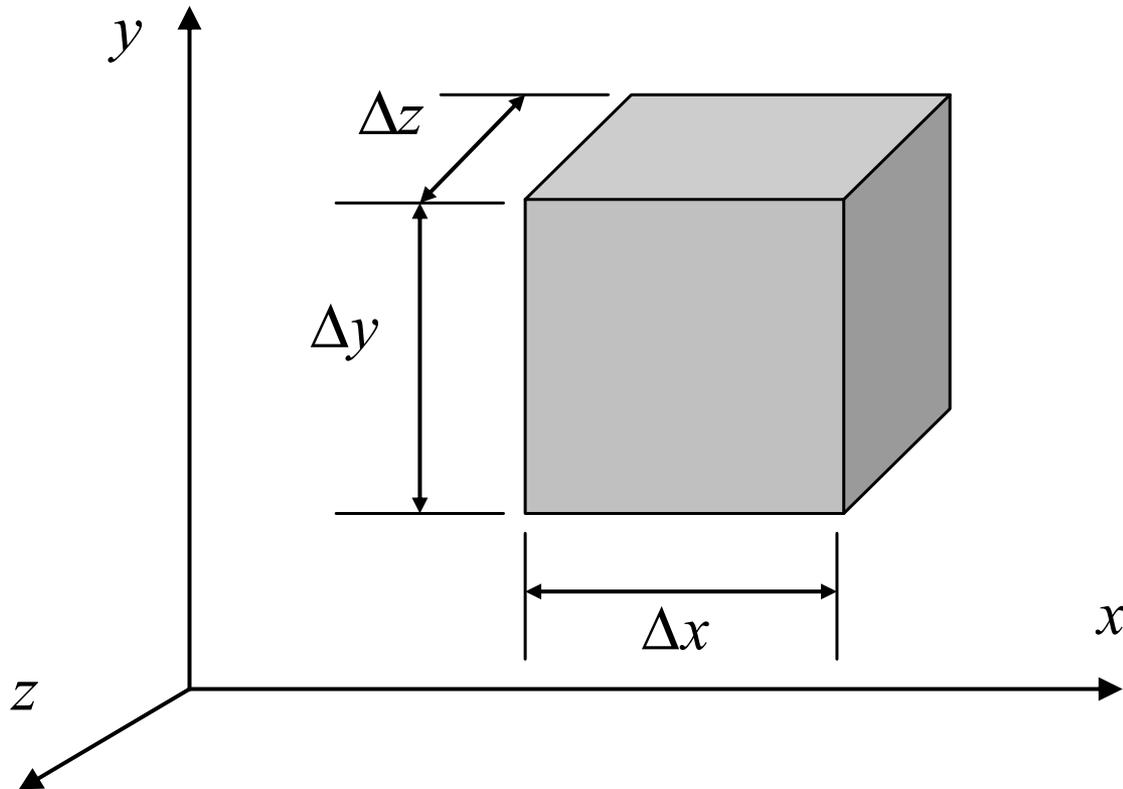
Determinar

- Esforços internos (tensões)
- Deformações
- Deslocamentos



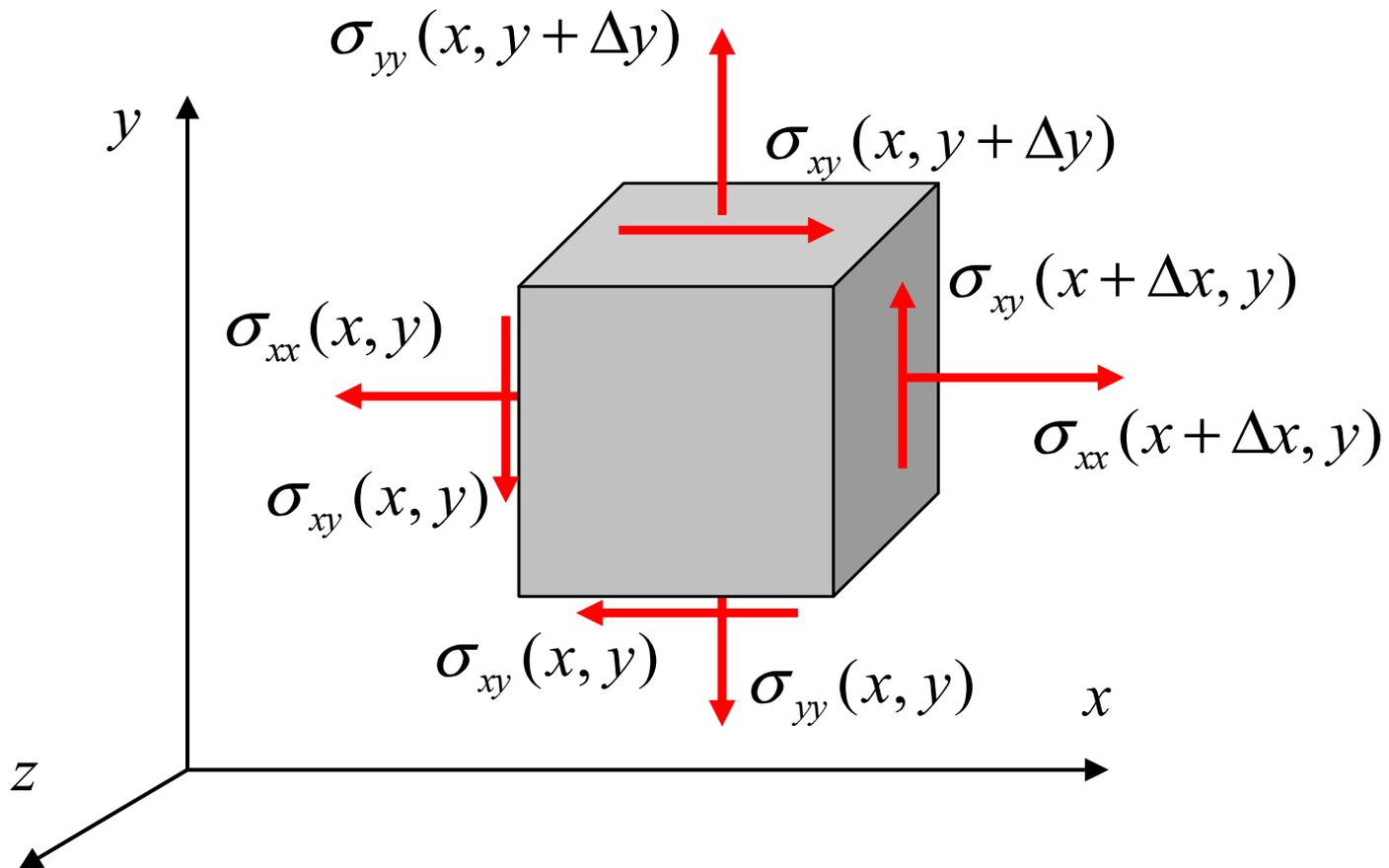
Teoria da Elasticidade

- Equações de Equilíbrio



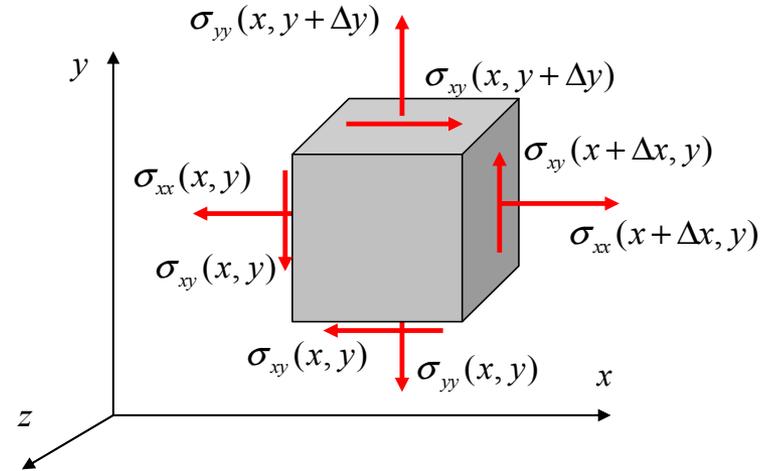
Teoria da Elasticidade

- Equações de Equilíbrio (estado plano de tensões)



Teoria da Elasticidade

- Balanço de forças



$$\begin{aligned}\sum F_x &= -\sigma_{xx}(x, y)\Delta y\Delta z - \sigma_{xy}(x, y)\Delta x\Delta z \\ &\quad + \sigma_{xx}(x + \Delta x, y)\Delta y\Delta z + \sigma_{xy}(x, y + \Delta y)\Delta x\Delta z = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= -\sigma_{xy}(x, y)\Delta y\Delta z - \sigma_{yy}(x, y)\Delta x\Delta z \\ &\quad + \sigma_{xy}(x + \Delta x, y)\Delta y\Delta z + \sigma_{yy}(x, y + \Delta y)\Delta x\Delta z = 0\end{aligned}$$

Teoria da Elasticidade

- Para Δx e Δy muito pequenos:

$$\sigma_{xx}(x + \Delta x, y) = \sigma_{xx}(x, y) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x$$

$$\sigma_{yy}(x, y + \Delta y) = \sigma_{yy}(x, y) + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \Delta y$$

$$\sigma_{xy}(x + \Delta x, y) = \sigma_{xy}(x, y) + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \Delta x$$

$$\sigma_{xy}(x, y + \Delta y) = \sigma_{xy}(x, y) + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Delta y$$

Teoria da Elasticidade

- Equações de Equilíbrio (Estado plano de tensão)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

Teoria da Elasticidade

- Equações de Equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Teoria da Elasticidade

- Relações entre deslocamentos e deformações

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xz} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

Teoria da Elasticidade

- Relações constitutivas (tensão vs. deformação)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Teoria da Elasticidade

- 15 Equações
 - Equilíbrio (3)
 - Deformação *vs.* Deslocamentos (6)
 - Tensão *vs.* Deformação (6)

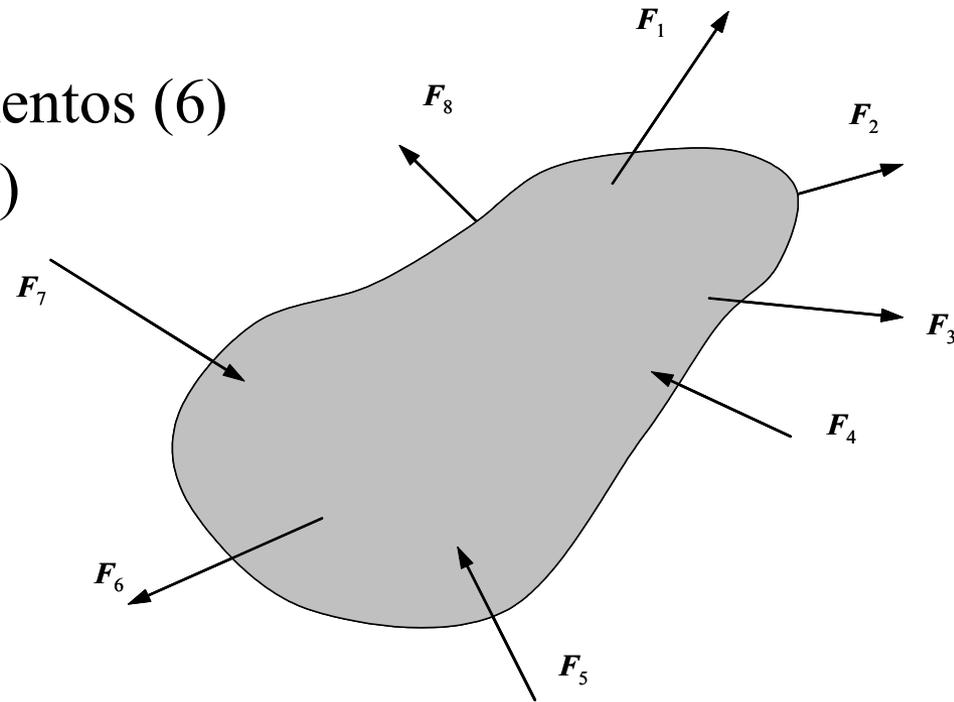
- 15 Variáveis:

$$u_x, u_y, u_z$$

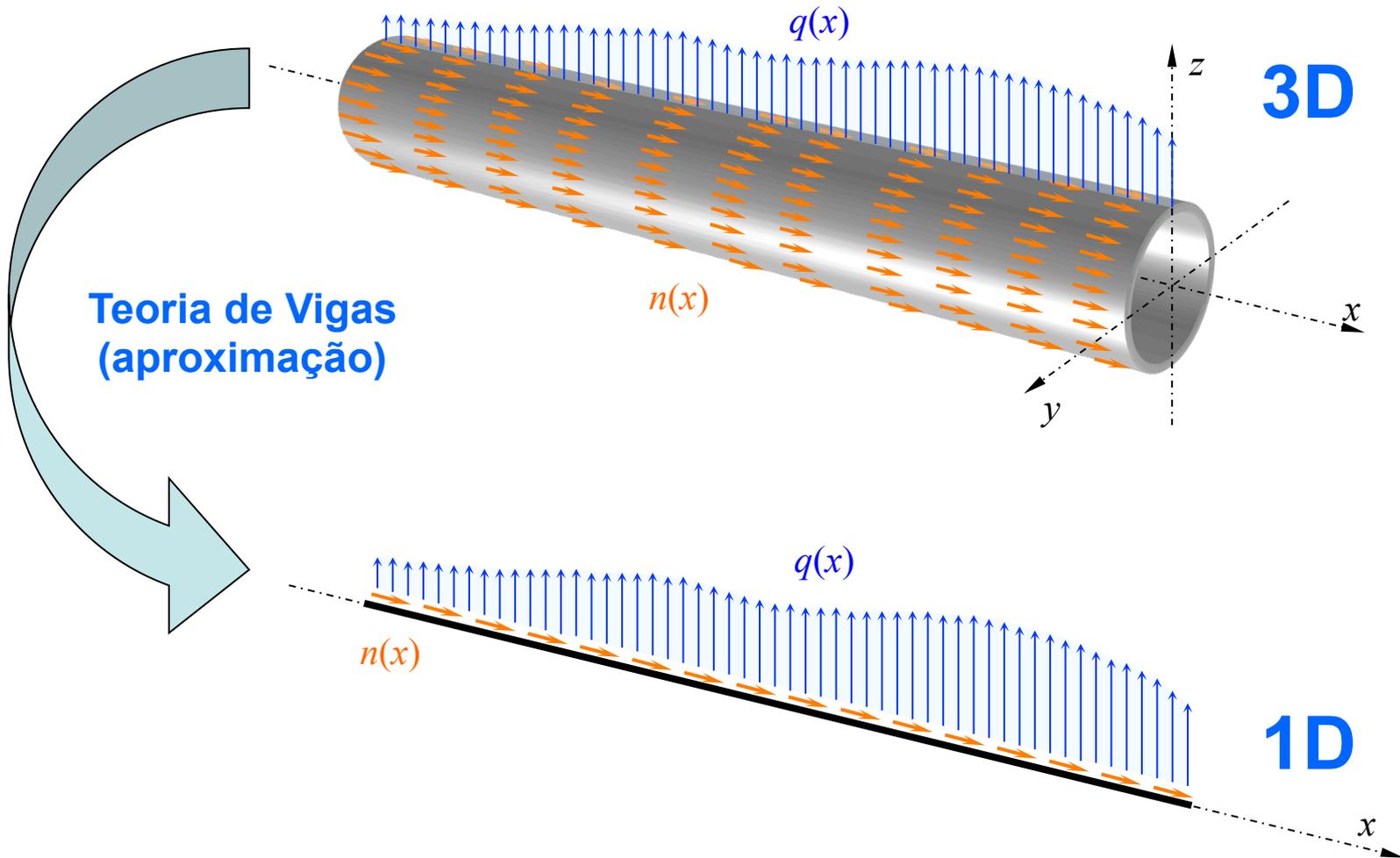
$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$$

$$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$$

- Condições de contorno



Teoria de Vigas



Cilindros de Paredes Grossas

