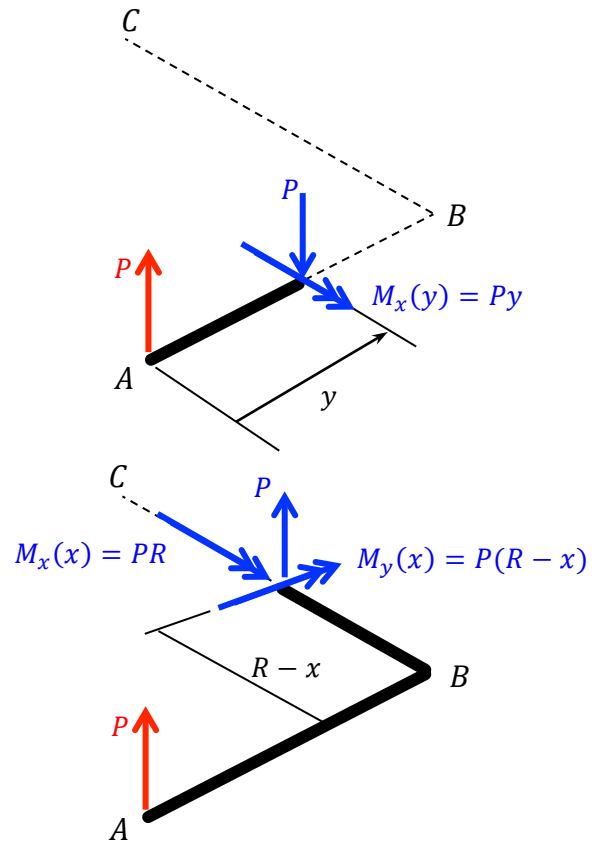
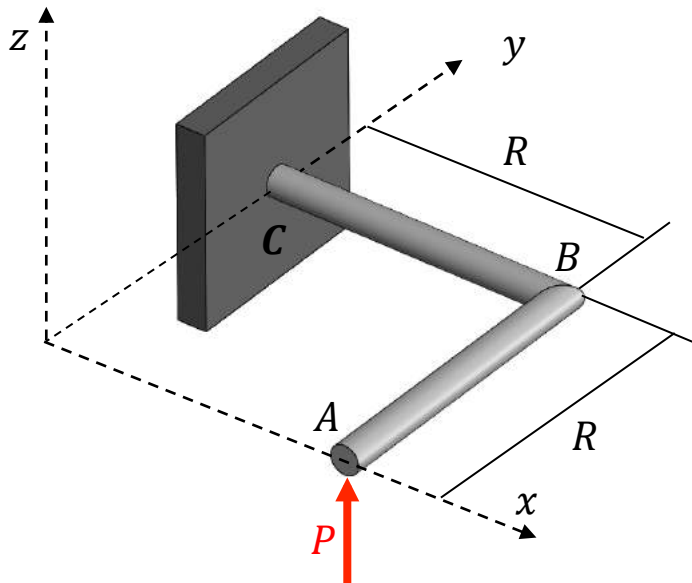


Problema 1(a) (2,0 pontos).



Trecho AB (momento fletor)

$$M_x(y) = Py$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = y$$

Trecho BC (momentos fletor M_y e torção M_x)

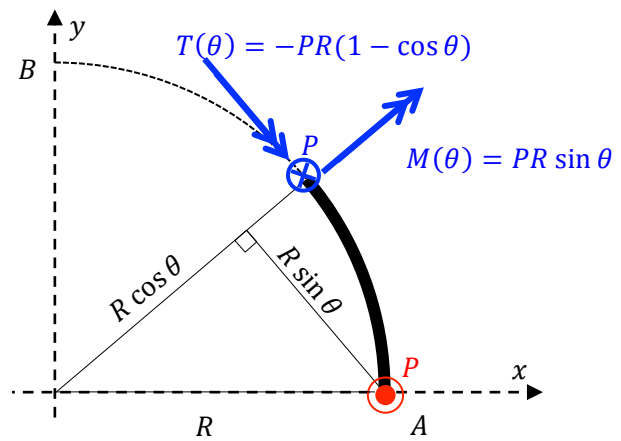
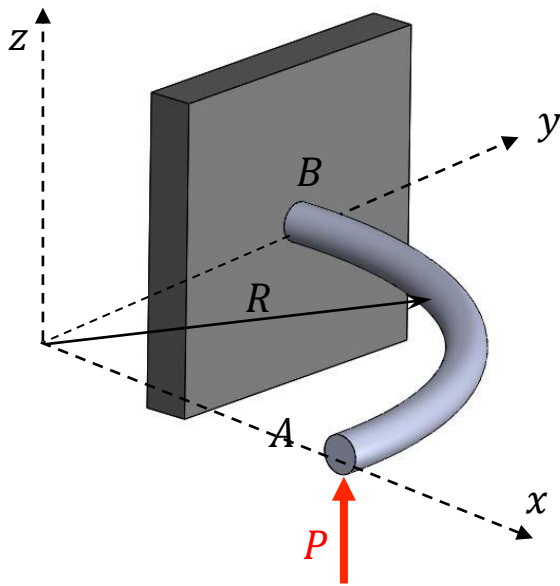
$$M_x(x) = PR \quad M_y(x) = P(R - x)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = R \quad \frac{\partial M_y}{\partial P} = R - x$$

Aplicando o Teorema de Castigliano:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^R (Py)(y)dy + \frac{1}{EI} \int_0^R [P(R - x)](R - x)dx + \frac{1}{GJ} \int_0^R (PR)Rdx = \frac{2PR^3}{3EI} + \frac{PR^3}{GJ} = \frac{2PR^3}{3EI} \left(1 + \frac{3E}{4G} \right)$$

Problema 1(a) (2,0 pontos).



$$\begin{aligned}
 \delta_A &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta)(R \sin \theta) R d\theta + \frac{1}{GJ} \int_0^{\pi/2} [PR(1 - \cos \theta)][R(1 - \cos \theta)] R d\theta \\
 &= \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta + \frac{PR^3}{GJ} \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{\pi PR^3}{4 EI} + \left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} \right) \frac{PR^3}{GJ} \\
 &= \frac{\pi PR^3}{4 EI} + \left(\frac{3\pi - 8}{4} \right) \frac{PR^3}{GJ} = \frac{\pi PR^3}{4 EI} \left[1 + \left(\frac{3\pi - 8}{\pi} \right) \frac{E}{G} \right]
 \end{aligned}$$

Problema 2 (3,5 pontos).

CASO 1 ($p_i = 35 \text{ MPa}$ e $p_o \approx 0$)

Modelo	Posição	$\sigma_{\theta\theta}$	σ_{zz}	σ_{rr}	σ_1	σ_2	σ_3	$\tau_{\max}$	$n_s = S_Y / 2\tau_{\max}$
Tubo de Parede Fina	Parede Interna	175 MPa	87,5 MPa	-35,0 MPa	175 MPa	87,5 MPa	-35,0 MPa	105 MPa	3,8
	Parede Externa	175 MPa	87,5 MPa	0	175 MPa	87,5 MPa	0	87,5 MPa	4,6
Tubo de Parede Grossa	Parede Interna	159 MPa	62,2 MPa	-35,0 MPa	159 MPa	62,2 MPa	-35,0 MPa	97,2 MPa	4,1
	Parede Externa	124 MPa	62,2 MPa	0	124 MPa	62,2 MPa	0	62,2 MPa	6,4

CASO 2 ($p_i \approx 0$ e $p_o = 30 \text{ MPa}$)

Modelo	Posição	$\sigma_{\theta\theta}$	σ_{zz}	σ_{rr}	σ_1	σ_2	σ_3	$\tau_{\max}$	$n_s = S_Y / 2\tau_{\max}$
Tubo de Parede Fina	Parede Interna	-150 MPa	-75,0 MPa	0	0	-75,0 MPa	-150 MPa	75,0 MPa	5,3
	Parede Externa	-150 MPa	-75,0 MPa	-30,0	-30,0	-75,0 MPa	-150 MPa	60,0 MPa	6,7
Tubo de Parede Grossa	Parede Interna	-167 MPa	-83,3 MPa	0	0	-83,3 MPa	-167 MPa	83,3 MPa	4,8
	Parede Externa	-137 MPa	-83,3 MPa	-30,0	-30,0 MPa	-83,3 MPa	-137 MPa	53,3 MPa	7,7

Considerando $\sigma_{rr} \approx 0$ no modelo de cilindro de paredes finas:

CASO 1 ($p_i = 35 \text{ MPa}$ e $p_o \approx 0$)									
Modelo	Posição	$\sigma_{\theta\theta}$	σ_{zz}	σ_{rr}	σ_1	σ_2	σ_3	$\tau_{\max}$	$n_S = S_Y/2\tau_{\max}$
Tubo de Parede Fina	Parede Interna	175 MPa	87,5 MPa	0	175 MPa	87,5 MPa	0	87,5 MPa	4,6
	Parede Externa	175 MPa	87,5 MPa	0	175 MPa	87,5 MPa	0	87,5 MPa	4,6
Tubo de Parede Grossa	Parede Interna	159 MPa	62,2 MPa	-35,0 MPa	159 MPa	62,2 MPa	-35,0 MPa	97,2 MPa	4,1
	Parede Externa	124 MPa	62,2 MPa	0	124 MPa	62,2 MPa	0	62,2 MPa	6,4

CASO 2 ($p_i \approx 0$ e $p_o = 30 \text{ MPa}$)									
Modelo	Posição	$\sigma_{\theta\theta}$	σ_{zz}	σ_{rr}	σ_1	σ_2	σ_3	$\tau_{\max}$	$n_S = S_Y/2\tau_{\max}$
Tubo de Parede Fina	Parede Interna	-150 MPa	-75,0 MPa	0	0	-75,0 MPa	-150 MPa	75,0 MPa	5,3
	Parede Externa	-150 MPa	-75,0 MPa	0	0	-75,0 MPa	-150 MPa	75,0 MPa	5,3
Tubo de Parede Grossa	Parede Interna	-167 MPa	-83,3 MPa	0	0	-83,3 MPa	-167 MPa	83,3 MPa	4,8
	Parede Externa	-137 MPa	-83,3 MPa	-30,0	-30,0 MPa	-83,3 MPa	-137 MPa	53,3 MPa	7,7

As equações utilizadas para o modelo de cilindro de parede fina (fórmula de Barlow) foram:

Parede interna do tubo:	$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i - p_o)b}{t}, \quad \sigma_{zz} = \frac{(p_i - p_o)b}{2t} \quad \text{e} \quad \sigma_{rr} = -p_i$
Parede externa do tubo:	$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i - p_o)b}{t}, \quad \sigma_{zz} = \frac{(p_i - p_o)b}{2t} \quad \text{e} \quad \sigma_{rr} = -p_o$

Onde $b/t = 5$.

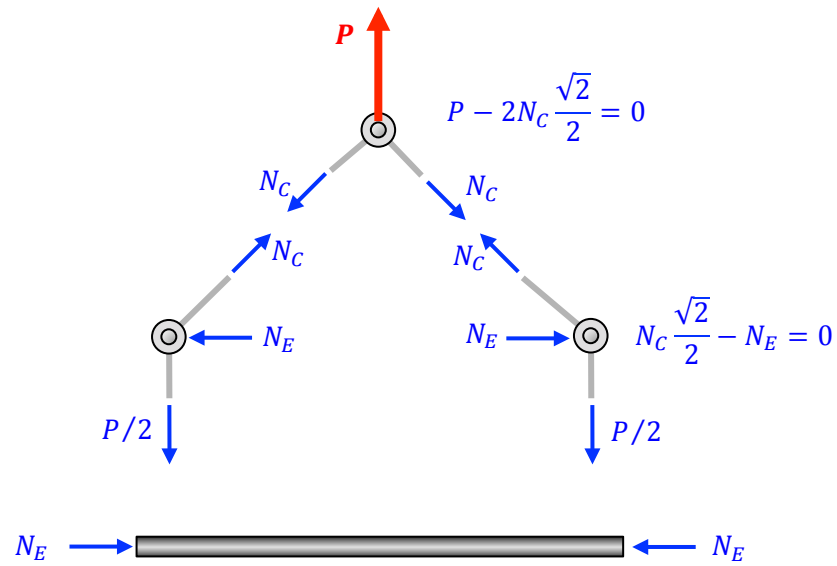
Para o modelo de cilindro de parede grossa (solução de Lamé) foram:

Parede interna do tubo:	$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_i - \frac{2(b^2/a^2)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_o, \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_i - \frac{b^2/a^2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_o \quad \text{e} \quad \sigma_{rr} = -p_i$
Parede externa do tubo:	$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_i - \frac{\left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_o, \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_i - \frac{b^2/a^2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_o \quad \text{e} \quad \sigma_{rr} = -p_o$

Onde $b^2/a^2 = 1,56$.

Obs.: Neste problema, a razão entre o raio externo e a espessura do tubo é $b/t = 5$. O erro da aproximação pelo modelo de cilindro fica, nos dois casos, abaixo de 10%. Considerando a tensão radial no modelo de parede fina, a solução aproximada é mais conservativa no caso de pressão interna e menos conservativa no caso da pressão externa (mais conservativa = menor coeficiente de segurança). Desconsiderando a tensão radial ($\sigma_{rr} \approx 0$) no modelo de parede fina, a solução exata (paredes grossas) é mais conservativa nos dois casos.

Problema 3 (2,5 pontos).



$$N_C = P/\sqrt{2}$$

$$N_E = P/2$$

Flambagem no espaçador: $N_E = P/2 < \pi^2 EI/L^2$

Considerando o coeficiente de segurança contra a flambagem no espaçador:

$$P_{\max} = 2\pi^2 EI/n_F L^2$$

Para $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 2,33 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, $L = 3 \text{ m}$ e $n_F = 2,5$

$$P_{\max} = 40,9 \text{ kN}$$