MECÂNICA DOS SÓLIDOS II

Gabarito: *P2 – 01/12/2008*

Problema 1.

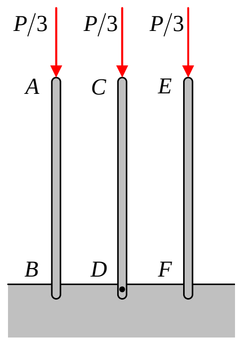
(a) Antes de ocorrer a instabilidade elástica ($P < P_{cr}^{(1)}$):

Considerando-se a simetria e o fato das três colunas serem idênticas (mesmo comprimento, diâmetro e material), pode-se mostrar que o peso do bloco, P, divide-se igualmente entre elas (exercício: demonstrar através do balanço de forças e a compatibilidade de deslocamento).

A menor carga crítica de flambagem é a da coluna CD, com apoio simples (rotulada) nas suas duas extremidades.

Assim, as três colunas se mantêm estáveis enquanto $P/3 < \pi^2 EI/L^2$ *, logo:*

$$P_{cr}^{(1)} = 3\pi^2 EI/L^2 = 113{,}5 \text{ kN}$$

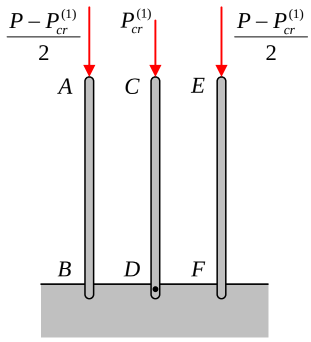


(b) Após a coluna *CD* sofrer flambagem:

Enquanto as colunas AB e EF ainda se mantiverem elásticas, e considerando que após sofrer a flambagem a coluna CD continua a resistir ao carregamento axial com um esforço normal compressivo igual à sua carga crítica de flambagem, as forças compressivas nas barras distribuem-se conforme mostrado na figura ao lado.

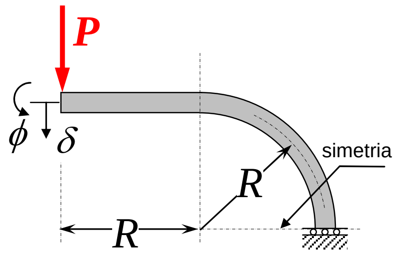
Assim, a estrutura sofre o colapso (perda de capacidade de responder ao aumento de carregamento) quando as duas colunas AB e EF sofrem flambagem e portanto:

$$\frac{P - P_{cr}^{(1)}}{2} < 20{,}2\frac{EI}{L^2} \quad \Rightarrow \quad P_L = P_{cr}^{(1)} + 2(20{,}2EI/L^2) = 192{,}8 \text{ kN}$$



Problema 2.

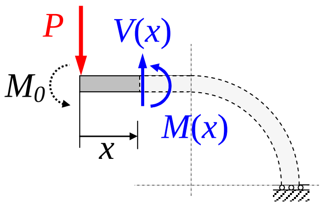
Levando-se em conta a simetria, pode-se resolver metade da estrutura. O deslocamento e rotação do ponto de aplicação da carga são calculados pelo Método de Castigliano



Distribuição do Momento Fletor

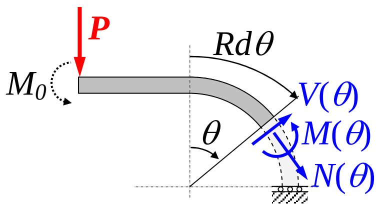
O momento M_0 , posteriormente igualado a zero, é aplicado na extermidade do arco para possibilitar o cálculo da rotação daquela seção.

$M(x), \quad 0 < x < R$



$$M(x) = -M_0 - Px$$

$M(\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$



$$M(\theta) = -M_0 - PR(1 + \sin\theta)$$

Aplicação do Teorema de Castigliano

Desprezando-se a contribuição dos esforços normal e cortante, a energia de deformação é dada por

$$U(P, M_0) = \int \frac{M^2(s, P, M_0)}{2EI} ds$$

Deslocamento:

$$\delta = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{M_0=0} = \left[\frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial P} ds\right]_{M_0=0}$$

Rotação:

$$\phi = \left.\frac{\partial U}{\partial M_0}\right|_{M_0=0} = \left[\frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial M_0} ds\right]_{M_0=0}$$

Introduzindo-se a distribuição do momento fletor e suas derivadas nas equações:

$$\delta = \frac{1}{EI}\left\{ \int_0^R [-Px][-x]dx + \int_0^{\pi/2} [-PR(1+\sin\theta)][-R(1+\sin\theta)]Rd\theta \right\}$$

$$= \frac{P}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^R + \frac{PR^3}{EI}\left[\theta - 2\cos\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{28+9\pi}{12}\right)\frac{PR^3}{EI}$$

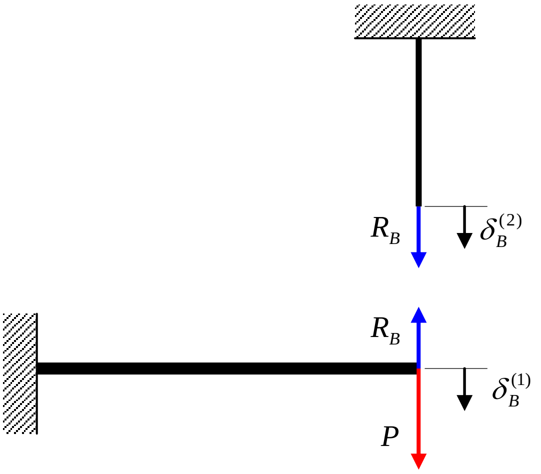
$$\phi = \frac{1}{EI}\left\{ \int_0^R [-Px][-1]dx + \int_0^{\pi/2} [-PR(1+\sin\theta)][-1]Rd\theta \right\}$$

$$= \frac{P}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^R + \frac{PR^2}{EI}[\theta - \cos\theta]_0^{\pi/2} = \left(\frac{3+\pi}{2}\right)\frac{PR^2}{EI}$$

A variação da abertura do arco é então $\Delta = 2\delta = (28+9\pi)PR^3/6EI$. *A rotação é* $\phi = (3+\pi)PR^2/2EI$.

Problema 3.

(a)



$$\delta_B^{(1)} = \frac{(P-R_B)L^3}{3EI} = C_V(P-R_B)$$

$$\delta_B^{(2)} = \frac{R_B H}{EA} = C_B R_B$$

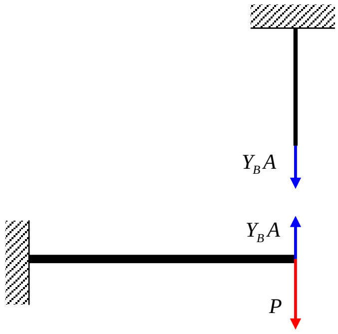
$$C_V = \frac{L^3}{3EI} = 1{,}25\times10^{-5}\ \text{m/N}$$

$$C_B = \frac{H}{EA} = 6{,}37\times10^{-7}\ \text{m/N}$$

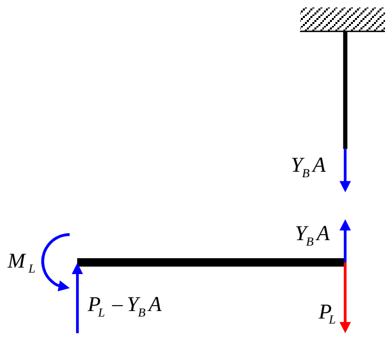
$$\delta_B^{(1)} = \delta_B^{(2)} \quad\Rightarrow R_B = \frac{C_V}{C_V + C_B}P = 0{,}952P$$

Escoamento na barra: $R_B = 0{,}952P < Y_B A \quad\Rightarrow\quad P_Y = 99{,}05\ \text{N}$

(b) *Se a viga é perfeitamente elástica, não há a possibilidade de colapso plástico da estrutura pois, mesmo com a barra plastificada, a viga continua a resistir ao carregamento (ver figura).*



(c) *Agora, como a viga tem um comportamento elástico/perfeitamente-plástico, o colapso plástico ocorre quando a barra está plastificada e a seção mais carregada da viga, a seção do engaste, também está plastificada*



$$M_Y = \frac{bh^2 S_Y}{6} = 9{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}, \quad M_L = \frac{3}{2}M_Y = 13{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_L - (P_L - Y_B A)L = 0 \quad\Rightarrow\quad P_L = \frac{M_L}{L} + Y_B A = 274{,}2\ \text{N}$$