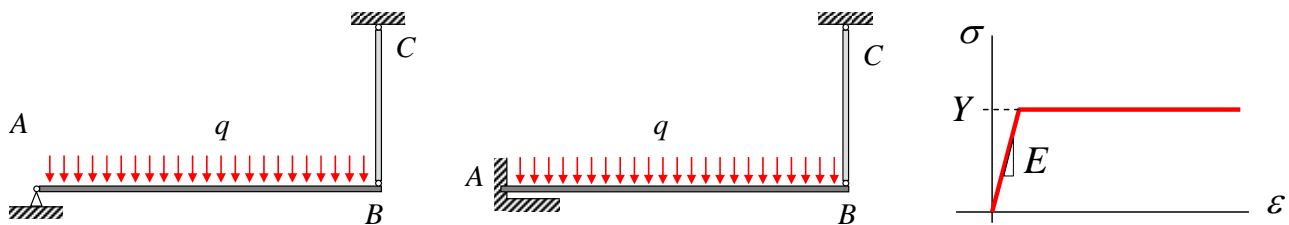


**Problema 1 (P1-2008).** A figura abaixo mostra duas configurações de montagem para a viga  $AB$ , cujo comprimento é  $L_V$  e o momento de inércia de sua seção retangular é  $I_V = bh^3/12$ . Na primeira configuração a viga é simplesmente apoiada na seção  $A$ . Na segunda, esta mesma extremidade encontra-se engastada. Nas duas configurações a viga tem a extremidade  $B$  suspensa pela barra vertical  $BC$ , de altura  $H_B$  e área da seção transversal  $A_B$ . A barra é livre para girar tanto em  $B$  quanto em  $C$ , ou seja, estas junções não transmitem momentos. Em ambos os casos a viga é submetida a uma carga distribuída por unidade de comprimento  $q$ . A viga e a barra são fabricadas a partir do mesmo material, cujo comportamento mecânico pode ser modelado como elástico-perfeitamente-plástico e caracterizado pelo módulo de elasticidade  $E$  e pelo limite de escoamento  $Y$  (ver figura). Lembrando que para uma viga de seção retangular o momento fletor limite, responsável pelo colapso plástico, é  $M_L = 1,5 M_Y = 1,5 (2Y I_V/h)$ , determine, para ambas as configurações abaixo, o valor da carga limite  $q_L$  que leva o conjunto viga/barra a sofrer o colapso plástico. Suponha que em ambos os casos as deformações plásticas apareçam inicialmente na barra (3,0 pontos).



Solução:

- (a) No caso da viga simplesmente apoiada em  $A$ , assumindo que as deformações plásticas têm início na barra, o colapso ocorre quando a tensão normal na barra atinge o limite de escoamento do seu material:

$$\sigma_B = Y \Rightarrow N_B = \sigma_B A_B = Y A_B$$

Pelo equilíbrio:

$$N_B = q_L L_V / 2$$

logo

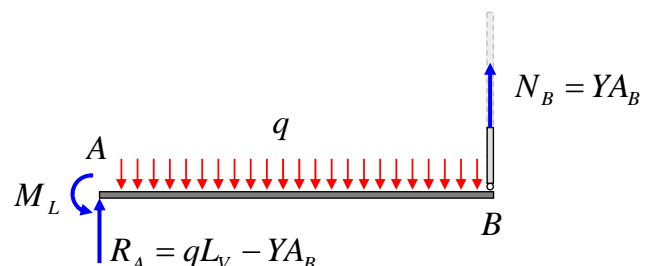
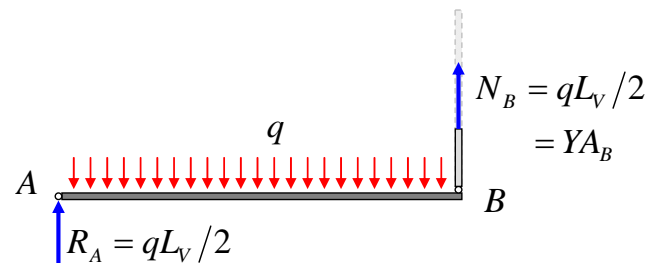
$$q_L = 2Y A_B / L_V$$

- (b) No caso da viga engastada em  $A$ , mais uma vez assumindo que as deformações plásticas têm início na barra, o colapso ocorre quando tanto a barra quanto a seção do engaste da viga estiverem completamente plastificadas. Neste caso, o momento fletor em  $A$  é igual ao momento limite  $M_L$ . Fazendo o balanço de momentos:

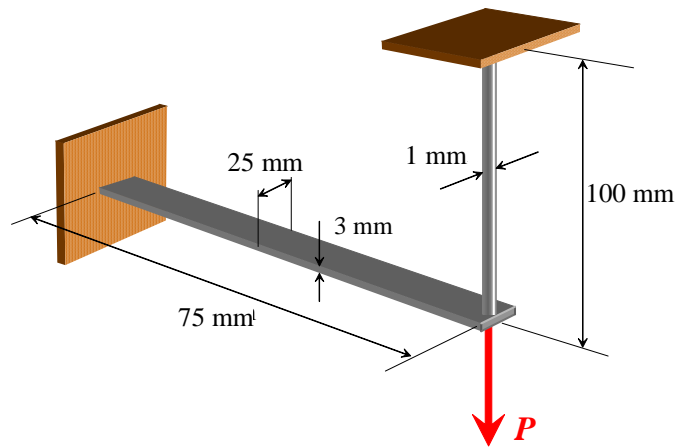
$$Y A_B L_V - q_L^2 L_V^2 / 2 + M_L = 0$$

logo

$$q_L = 2M_L / L_V^2 - 2Y A_B / L_V$$



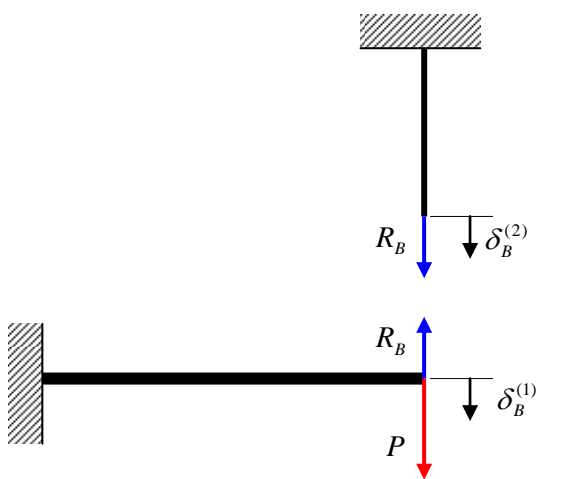
**Problema 2 (P2-2008).** A figura mostra uma viga engastada de seção retangular apoiada por um arame circular (dimensões indicadas na figura). A viga e o arame têm o mesmo módulo de elasticidade,  $E = 200 \text{ GPa}$ . O arame possui um limite de escoamento  $Y_B = 120 \text{ MPa}$ . O material da viga é perfeitamente elástico, porém o material do arame pode ser considerado como elástico/perfeitamente-plástico. O conjunto é carregado verticalmente pela força  $P$ . Considere que as junções entre a viga e o arame e o arame e seu apoio superior não transmitem momentos (rótulas).



- Determine  $P_Y$ , o valor da carga que leva o arame ao escoamento (1,5 pontos).
- Neste modelo da estrutura existe a possibilidade de colapso plástico? Caso a resposta seja positiva, determine o valor da carga limite. Caso contrário, justifique a resposta (1,0 ponto).
- Supondo agora que o material da viga também se comporte como elástico/perfeitamente-plástico e com limite de escoamento  $Y_V = 240 \text{ MPa}$ , determine o valor da carga limite (1,0 ponto).

### Solução

(a)



$$\delta_B^{(1)} = \frac{(P - R_B)L^3}{3EI} = C_V(P - R_B)$$

$$\delta_B^{(2)} = \frac{R_B H}{EA} = C_B R_B$$

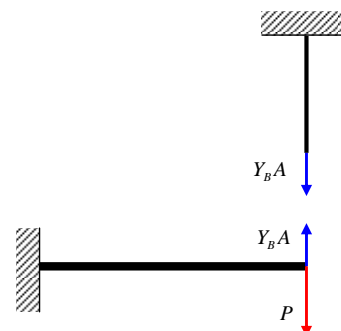
$$C_V = \frac{L^3}{3EI} = 1,25 \times 10^{-5} \text{ m/N}$$

$$C_B = \frac{H}{EA} = 6,37 \times 10^{-7} \text{ m/N}$$

$$\delta_B^{(1)} = \delta_B^{(2)} \Rightarrow R_B = \frac{C_V}{C_V + C_B} P = 0,952 P$$

d) Escoamento na barra:  $R_B = 0,952 P < Y_B A \Rightarrow P_Y = 99,05 \text{ N}$

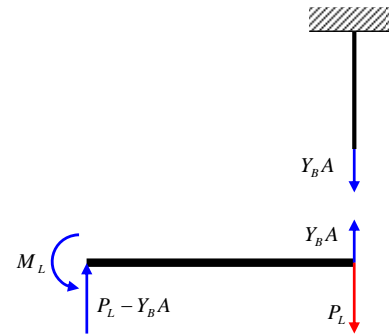
(b) Se a viga é perfeitamente elástica, não há a possibilidade de colapso plástico da estrutura pois, mesmo com a barra plastificada, a viga continua a resistir ao carregamento (ver figura).



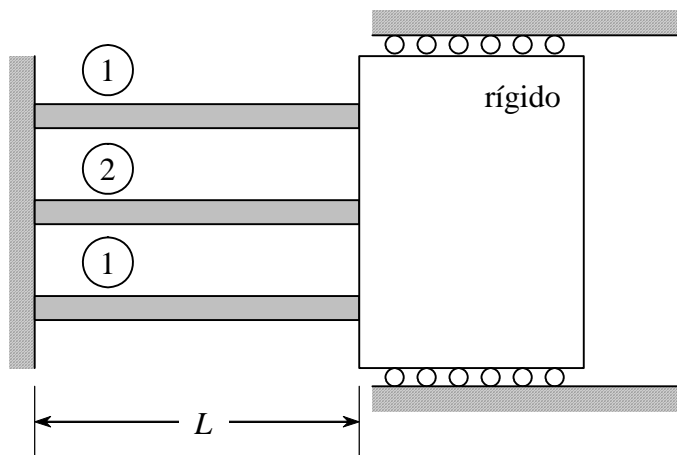
(c) Agora, como a viga tem um comportamento elástico/perfeitamente-plástico, o colapso plástico ocorre quando a barra está plastificada e a seção mais carregada da viga, a seção do engaste, também está plastificada

$$M_Y = \frac{bh^2 S_Y}{6} = 9,0 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M_L = \frac{3}{2} M_Y = 13,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

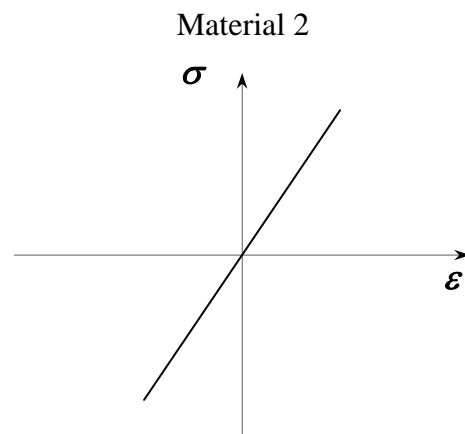
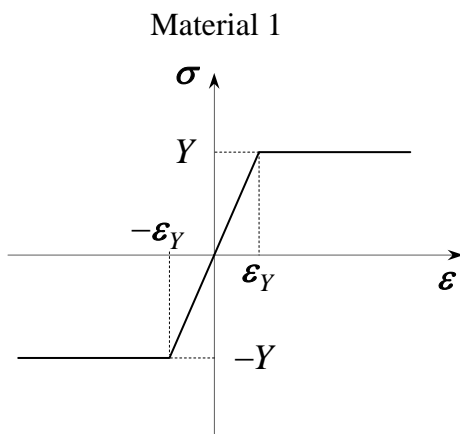
$$M_L - (P_L - Y_B A)L = 0 \Rightarrow P_L = \frac{M_L}{L} + Y_B A = 274,2 \text{ N}$$



**Problema 3 (P3-2005).** Na estrutura mostrada na figura, as três barras têm a mesma seção transversal de área  $A$  e o mesmo comprimento  $L$  quando estão na temperatura de montagem  $T_0$ . Por outro lado, os materiais das barra têm módulos de elasticidade e coeficientes de expansão térmica diferentes. Além disso, o Material 1 pode ser considerado elástico/perfeitamente-plástico enquanto o material 2 se comporta no regime elástico para a faixa de deformações de interesse (ver figuras). O problema consiste na análise do comportamento estrutural quando a temperatura do conjunto sofre variações positivas.



$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha & \alpha_2 &= 2\alpha \\ E_1 &= E & E_2 &= 2E \end{aligned}$$

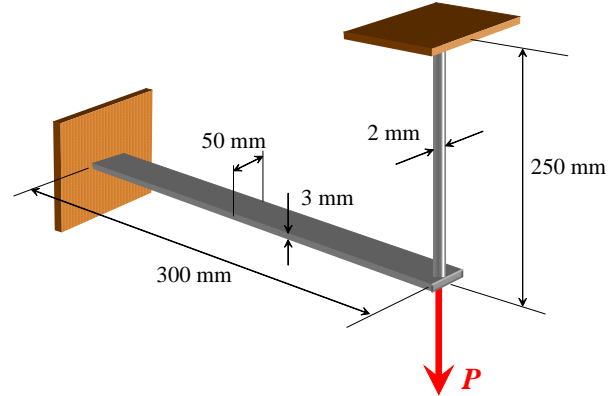


- Determine a variação de temperatura  $\Delta T_Y$  a partir da qual o Material 1 passa a se comportar plasticamente.
- Determine o deslocamento longitudinal das barras quanto  $\Delta T = \Delta T_Y$ .
- Determine o deslocamento longitudinal das barras quanto  $\Delta T = 2\Delta T_Y$ .
- Determine o deslocamento residual e as forças residuais nas barras após um ciclo térmico em que a temperatura inicialmente é  $T_0$ , sobe até  $T_0 + 2\Delta T_Y$  e retorna novamente a  $T_0$ .

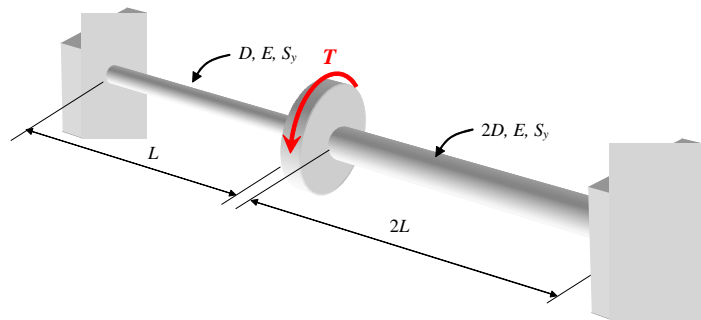
**Problema 4 (P2-2005).** A figura abaixo mostra uma viga engastada de seção retangular apoiada por uma barra circular (dimensões indicadas na figura). A viga e a barra têm o mesmo módulo de elasticidade,  $E = 200 \text{ GPa}$ . O limite de escoamento da viga é  $Y_V = 340 \text{ MPa}$  e o da barra é  $Y_B = 200 \text{ MPa}$ . Tanto o material da viga quanto o da barra podem ser considerados como elástico/perfeitamente-plásticos. O conjunto é carregado verticalmente pela força  $P$ . Considere que a junção entre a viga e a barra não transmite momento.

Determine:

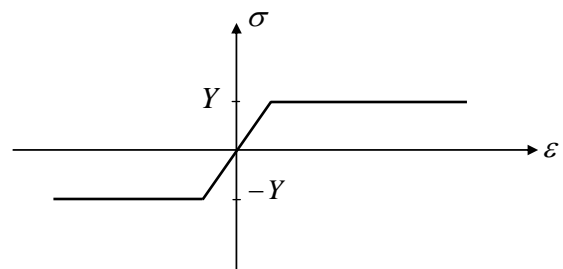
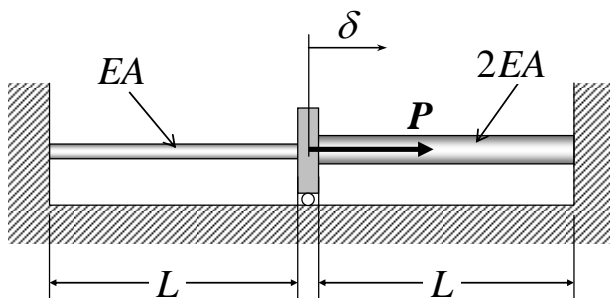
- e)  $P_Y$ , o valor limite da carga  $P$  abaixo da qual tanto a barra quanto a viga permanecem no regime elástico (1.5 pontos).
- f)  $P_L$ , a carga limite, ou seja, o valor da força  $P$  que leva o conjunto ao colapso plástico (1.5 pontos).
- g) A deflexão residual da viga quando ela é carregada até 10% acima de  $P_Y$  e subsequentemente descarregada. Determine também a força residual na barra e as reações de apoio da viga (1.5 ponto).



**Problema 5 (P2-2005).** Determine  $T_y$ , o torque responsável pelo início do escoamento no eixo mostrado na figura, e  $T_L$ , o torque necessário para levar o eixo ao colapso plástico (2.5 pontos).



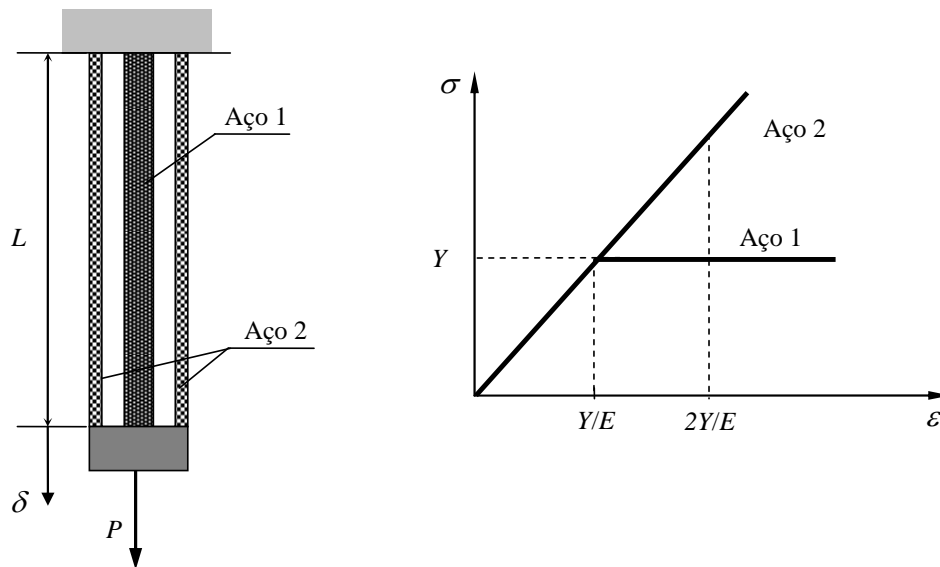
**Problema 6 (P3-2006).** Considere o conjunto formado por duas barras mostrado na figura abaixo. As barras de comprimentos idênticos são fabricadas do mesmo material, que pode ser considerado elástico/perfeitamente-plástico (ver o diagrama tensão vs. deformação esquematicamente apresentado). A área da seção transversal da barra da direita é o dobro da outra. O conjunto é submetido a um ciclo de carregamento e descarregamento de tal forma que o deslocamento máximo atingido chegue a um valor  $\delta_{\max} = 3YL/E$ . Determine o deslocamento residual do conjunto,  $\delta_R$ , após a remoção da carga  $P$ . Verifique também se o conjunto permanece com alguma tensão residual quando o carregamento é removido. (2,5 pontos).



**Problema 7. (P2-2006)** – Três barras metálicas estão conectadas por uma placa rígida carregada axialmente pela força  $P$ . A variação no comprimento do conjunto é representada pelo deslocamento  $\delta$ . O módulo de elasticidade,  $E$ , dos dois materiais é o mesmo. A área da seção transversal da barra fabricada do aço 1 é  $A$ . As barras fabricadas do aço 2 são idênticas, com seção transversal de área  $A/2$ . O material da barra 1 pode ser modelado como elástico/perfeitamente-plástico com limite de escoamento  $Y$ . Partindo da condição indeformada, o conjunto é carregado até que seu deslocamento seja  $\delta = 2YL/E$ .

Determine:

- o comprimento residual do conjunto (1.0 ponto)
- as tensões residuais após o carregamento ter sido removido (1.5 ponto).



Solução:

Gráfico da Força vs. Deslocamento do conjunto

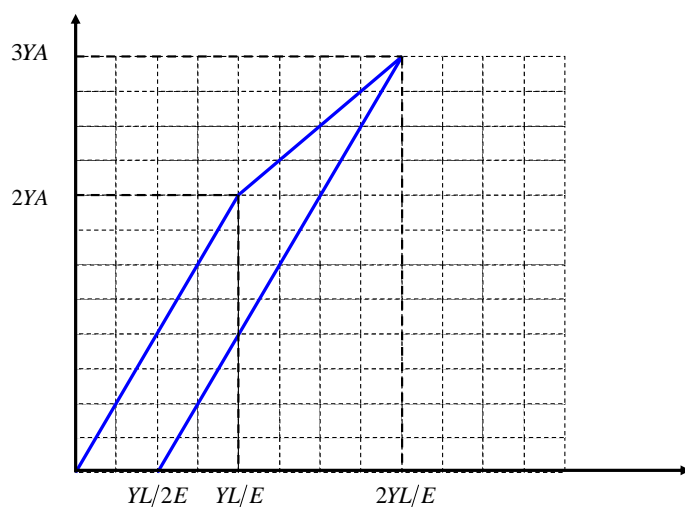
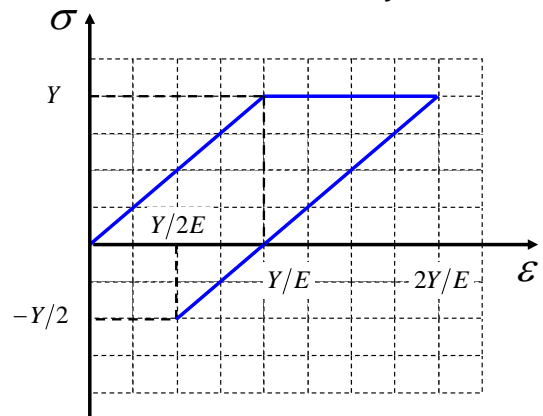


Gráfico da Tensão vs. Deformação da Barra 1



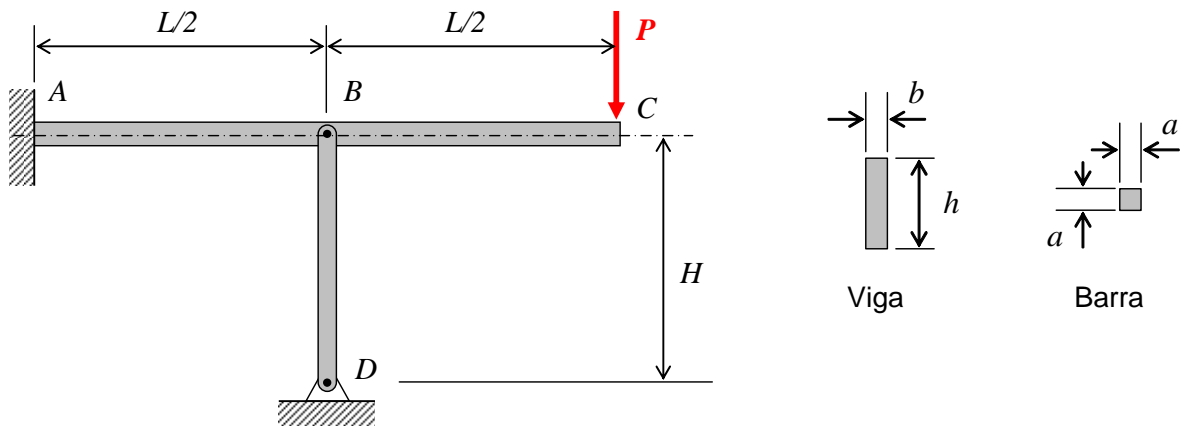
Deformação residual:  $\delta^R = YL/2E$

Tensão residual na barra 1:  $\sigma_1^R = -Y/2$

Tensão residual nas barras 2:  $\sigma_2^R = Y/2$

**Problema 8.** Conforme mostra a figura abaixo, a viga  $ABC$  é suportada no ponto  $B$  pela barra vertical  $BD$  e carregada na extremidade  $C$  por uma força  $P$ . Tanto a viga quanto a barra são fabricadas do mesmo material cujo módulo de elasticidade é  $E$  e o limite de escoamento  $S_Y$ .

(a) Para  $H = 3L/2$ , determine o valor máximo admissível para a carga  $P$  considerando a possibilidade de falha por escoamento na barra ou na viga.

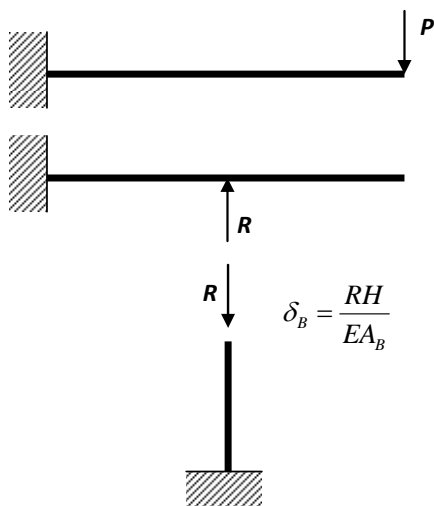


$L$ (mm)	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$a$ (mm)	$S_Y$ (MPa)	$E$ (GPa)
100	2.5	10	3	360	200

(b) Determine a carga de colapso plástico,  $P_L$ , para a estrutura da figura acima quando  $H = L/2$ . Considere que o material da viga e da barra é elástico/perfeitamente-plástico.

Solução:

(a)



$$\delta_B^P = \frac{P(L/2)^2}{6EI_V} (3L - L/2) = \frac{5PL^3}{48EI_V}$$

$$\delta_B^R = \frac{R(L/2)^3}{3EI_V} = \frac{RL^3}{24EI_V}$$

$$\delta_B = \frac{RH}{EA_B}$$

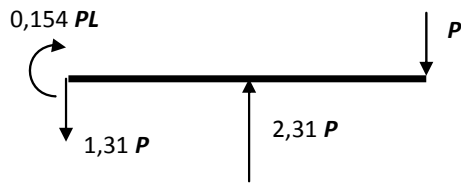
$$\delta_B = \delta_B^P - \delta_B^R \Rightarrow \frac{RH}{EA_B} = \frac{5PL^3}{48EI_V} - \frac{RL^3}{24EI_V}$$

$$R = \frac{5}{2} \left[ 1 + 24 \frac{I_V H}{A_B L^3} \right]^{-1} P$$

$$I_V = \frac{bh^3}{12} = 2,08 \times 10^{-10} \text{ m}^4, A_B = a^2 = 9,00 \times 10^{-6} \text{ m}^2, H = 150 \text{ mm}, L = 100 \text{ mm}, I_B = \frac{a^4}{12} = 6,75 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

$$R = 2,31 P$$

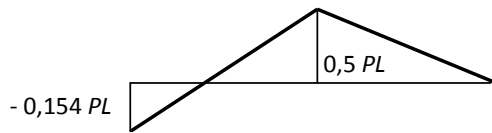
### Reações na Viga



### Reações na Barra



### Distribuição de Momento Fletor na Viga

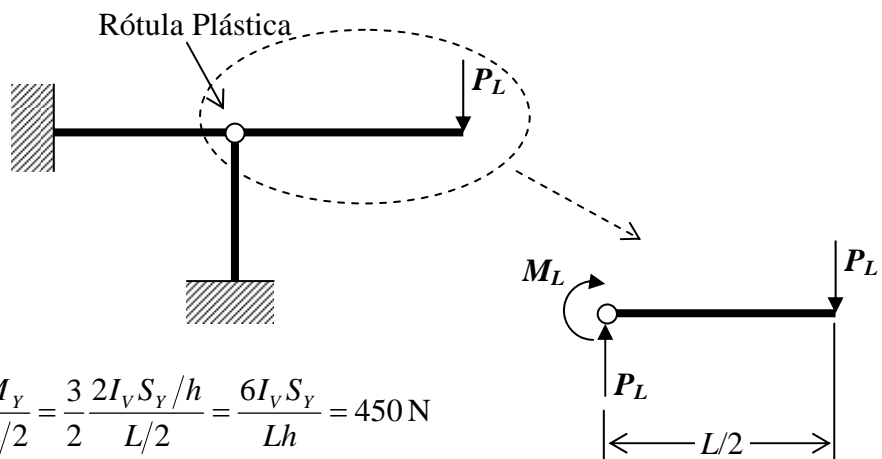


$$1) \text{ Falha por escoamento na viga: } \max\{\sigma_{xx}\} = \frac{h}{2} \frac{|M_{\max}|}{I_V} = \frac{h}{2} \frac{0,5 PL}{I_V} < S_y \Rightarrow P < \frac{4 S_y I_V}{Lh} = 300 \text{ N}$$

$$2) \text{ Falha por escoamento na barra: } \max\{\sigma\} = \frac{R}{A_B} = \frac{2,31 P}{A_B} < S_y \Rightarrow P < \frac{S_y A_B}{2,31} = 1404 \text{ N}$$

$$P_{\max} = 300 \text{ N}$$

(b)



$$P_L = \frac{M_L}{L/2} = \frac{3 M_Y}{2 L/2} = \frac{3}{2} \frac{2 I_V S_Y / h}{L/2} = \frac{6 I_V S_Y}{Lh} = 450 \text{ N}$$