

Departamento de Engenharia Mecânica



Mecânica dos Sólidos I

Parte 5 – Tensões de Flexão

Prof. Arthur M. B. Braga

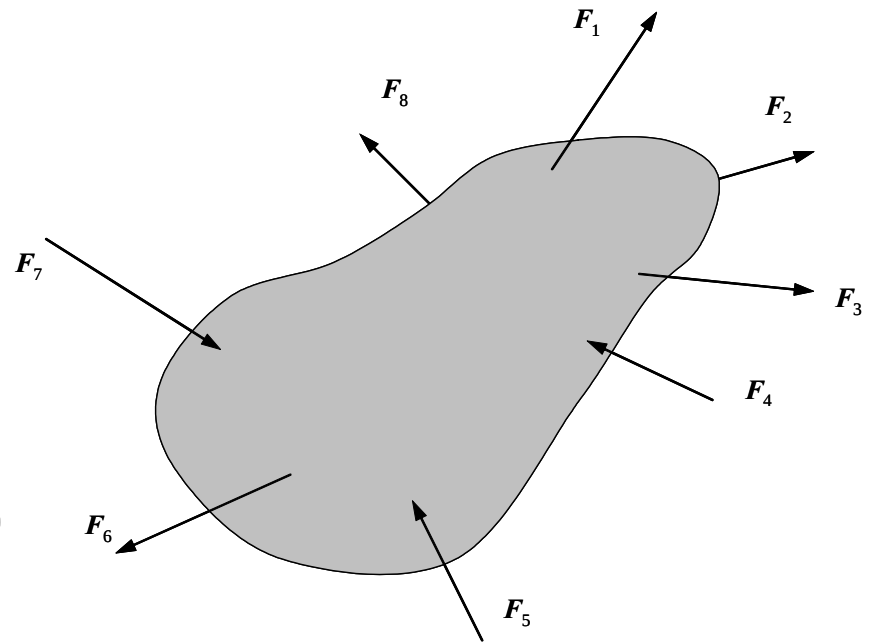
Mecânica dos Sólidos

Problema

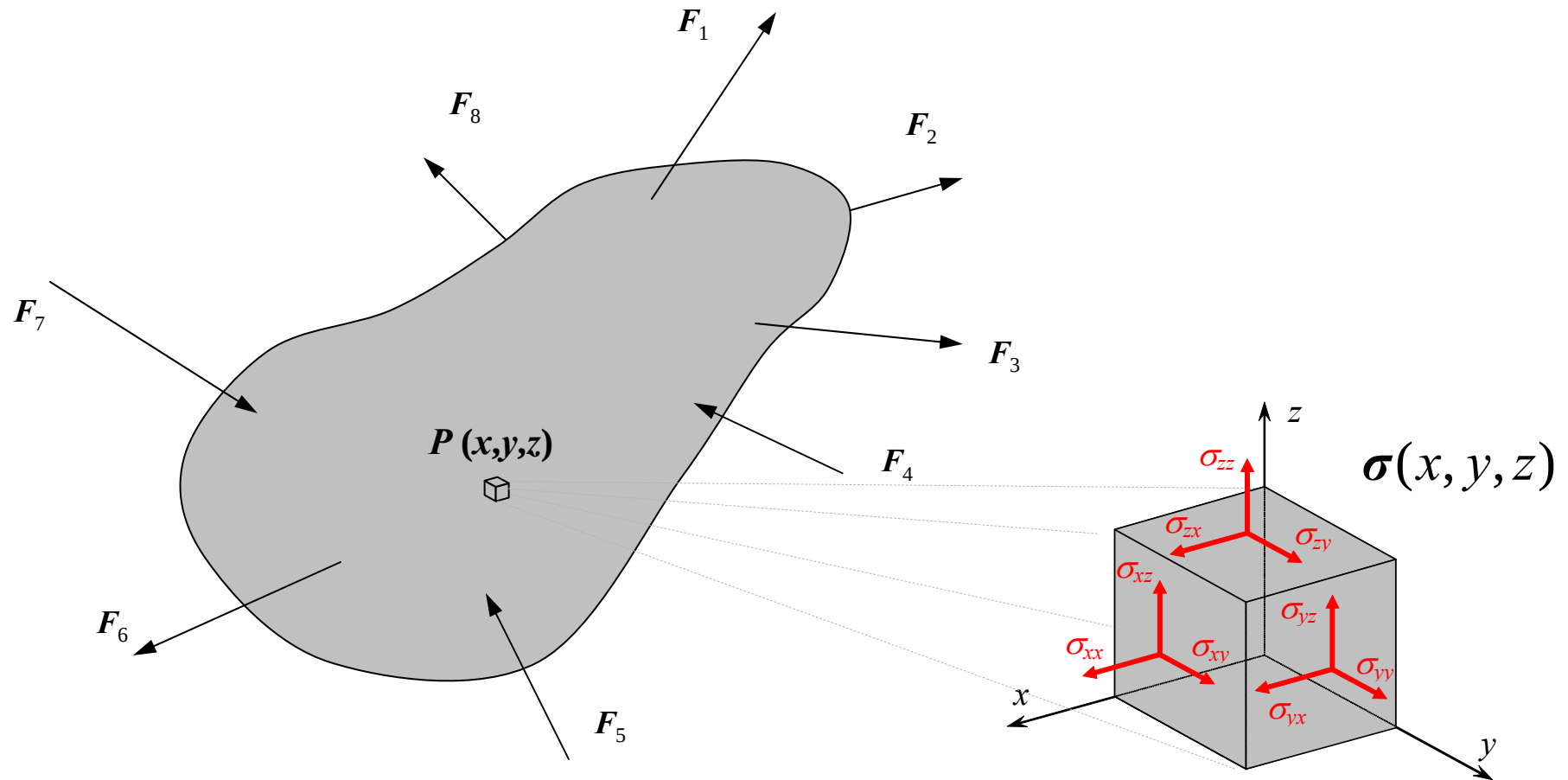
Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

Determinar

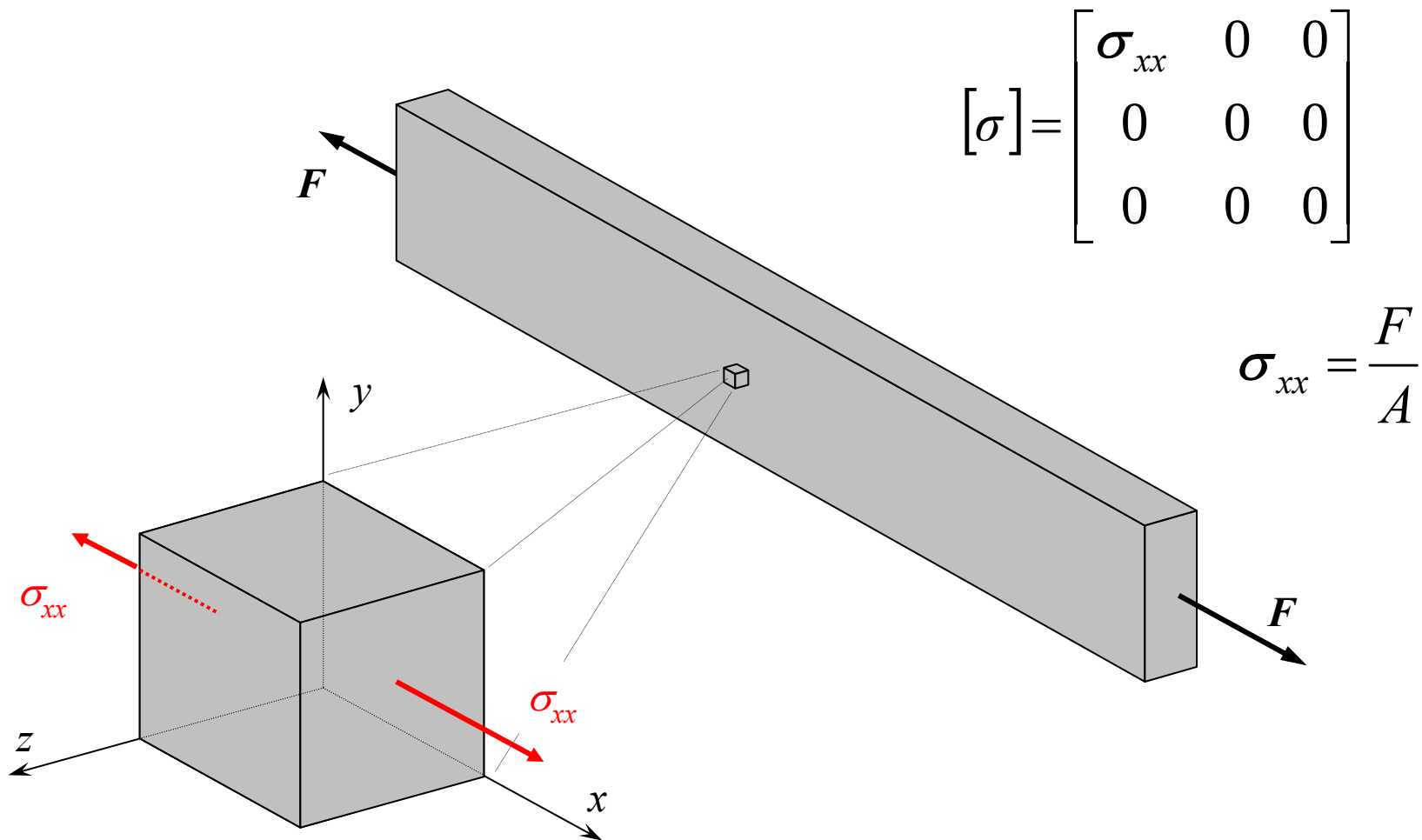
- Esforços internos (tensões)
- Deformações
- Deslocamentos



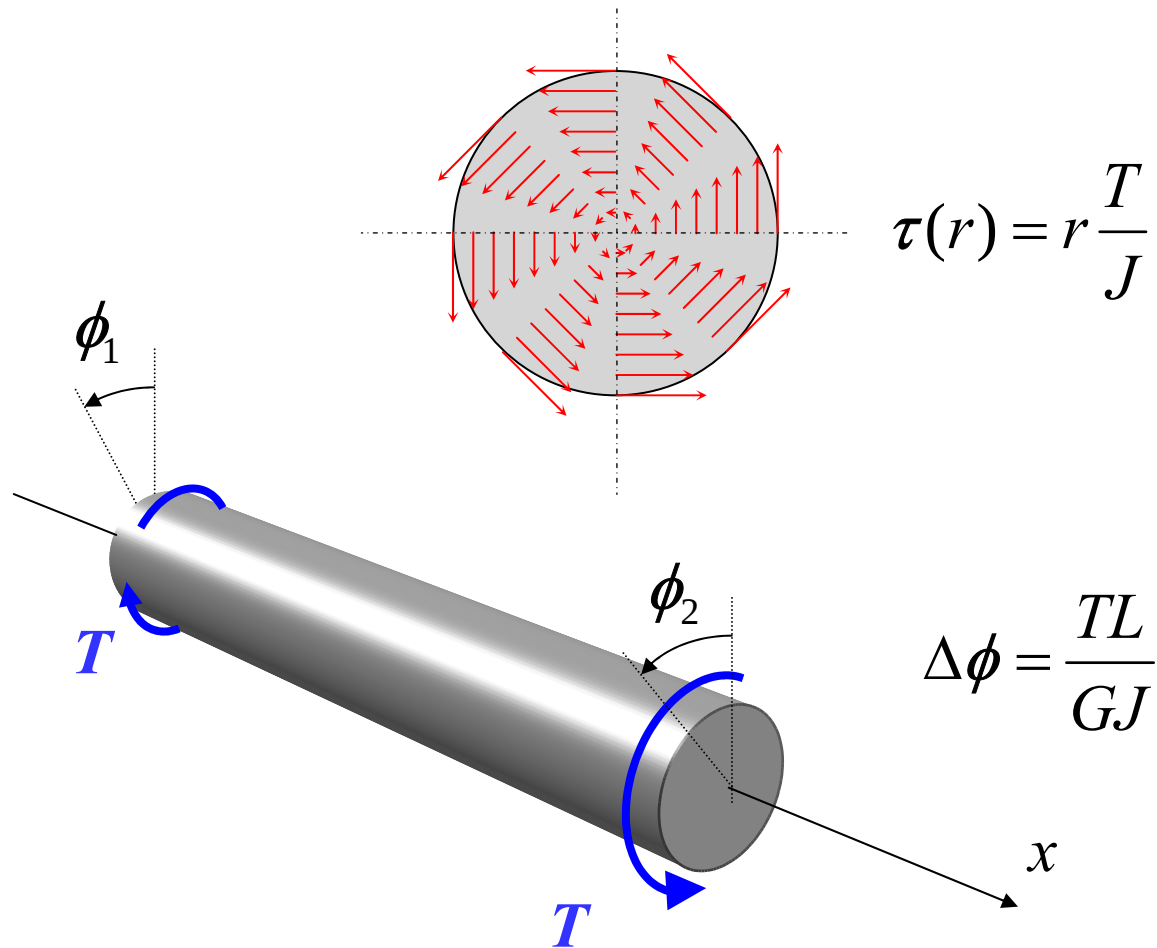
Determinação da Distribuição de Tensão no Corpo Sujeito à Ação de Forças Externas



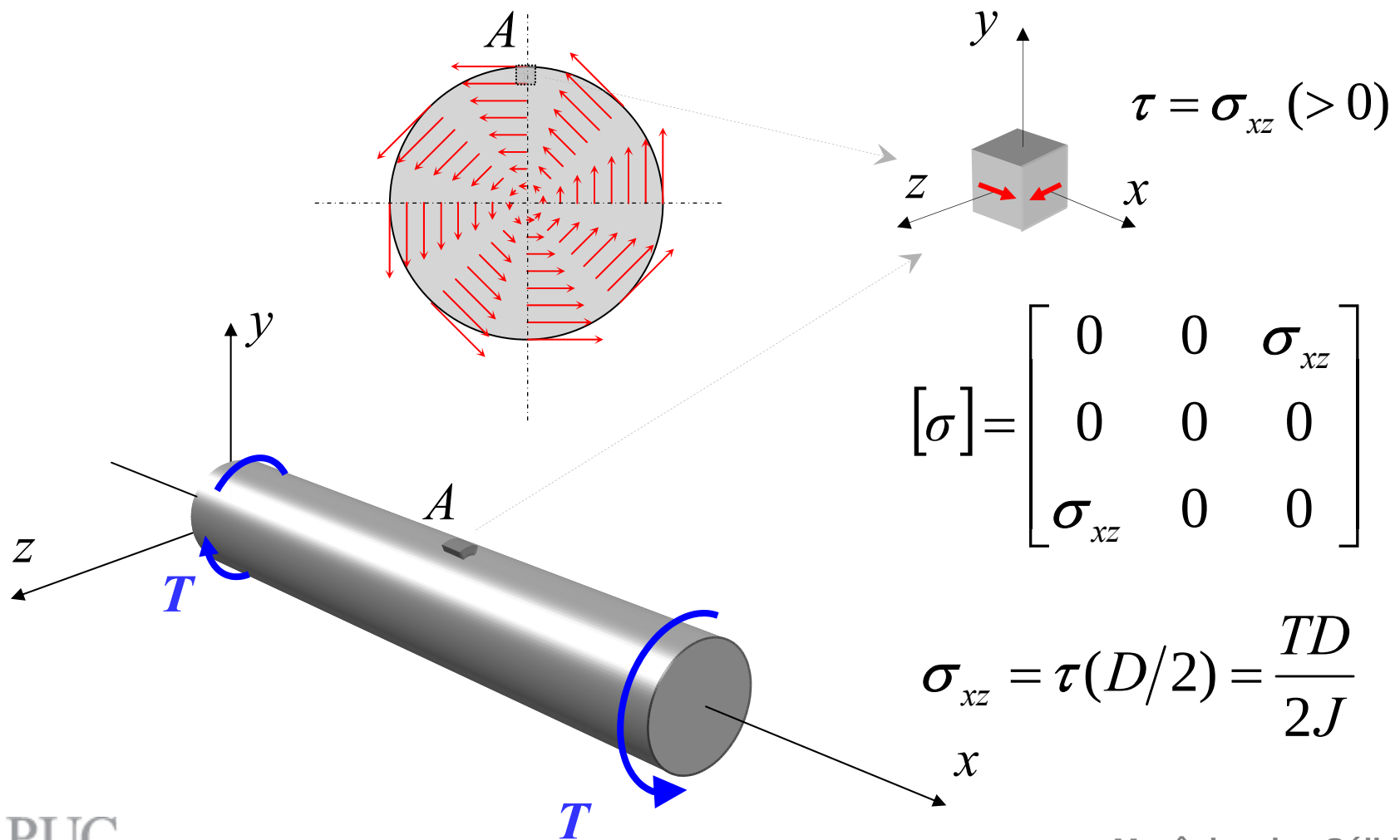
Barras Carregadas Axialmente



Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção

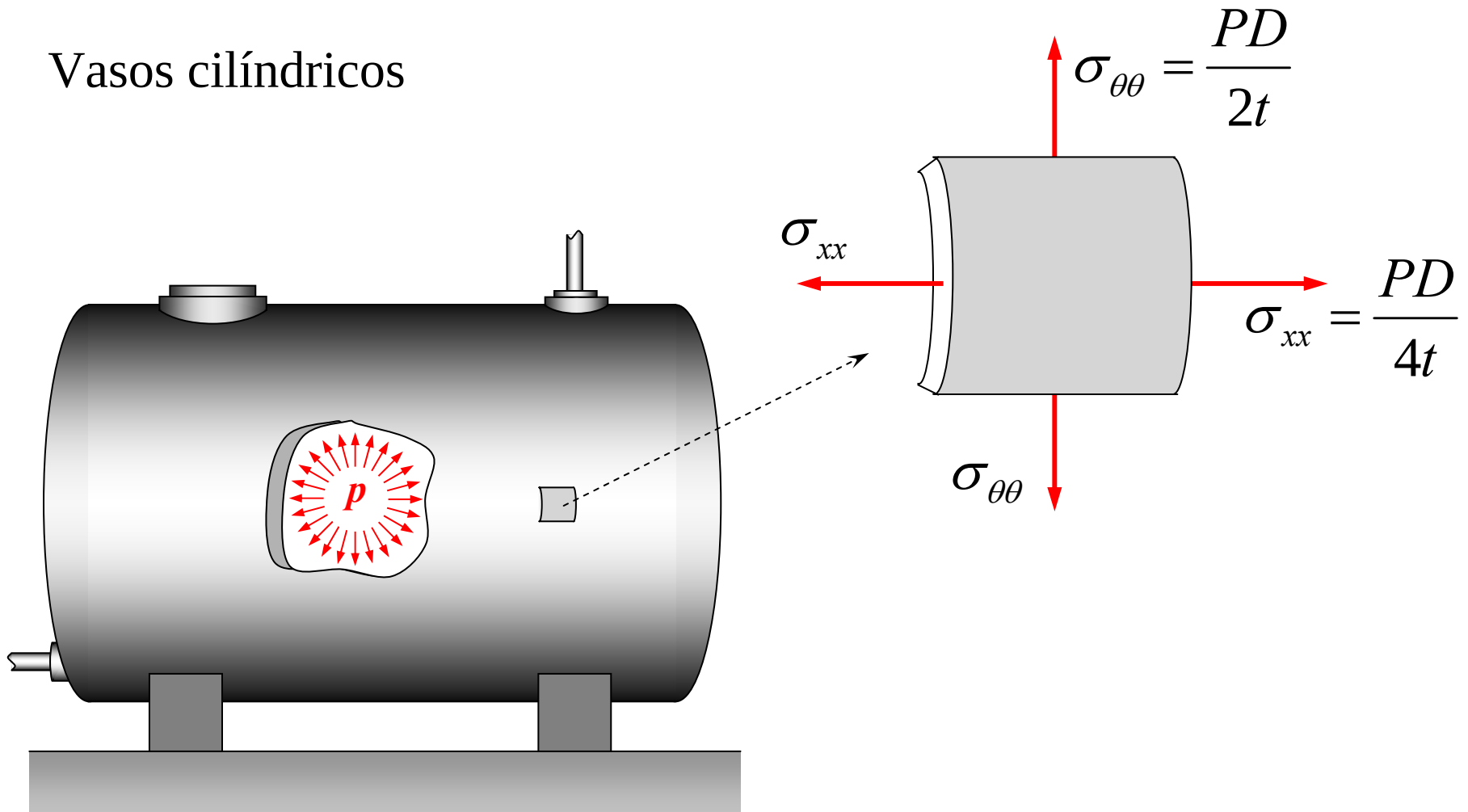


Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção



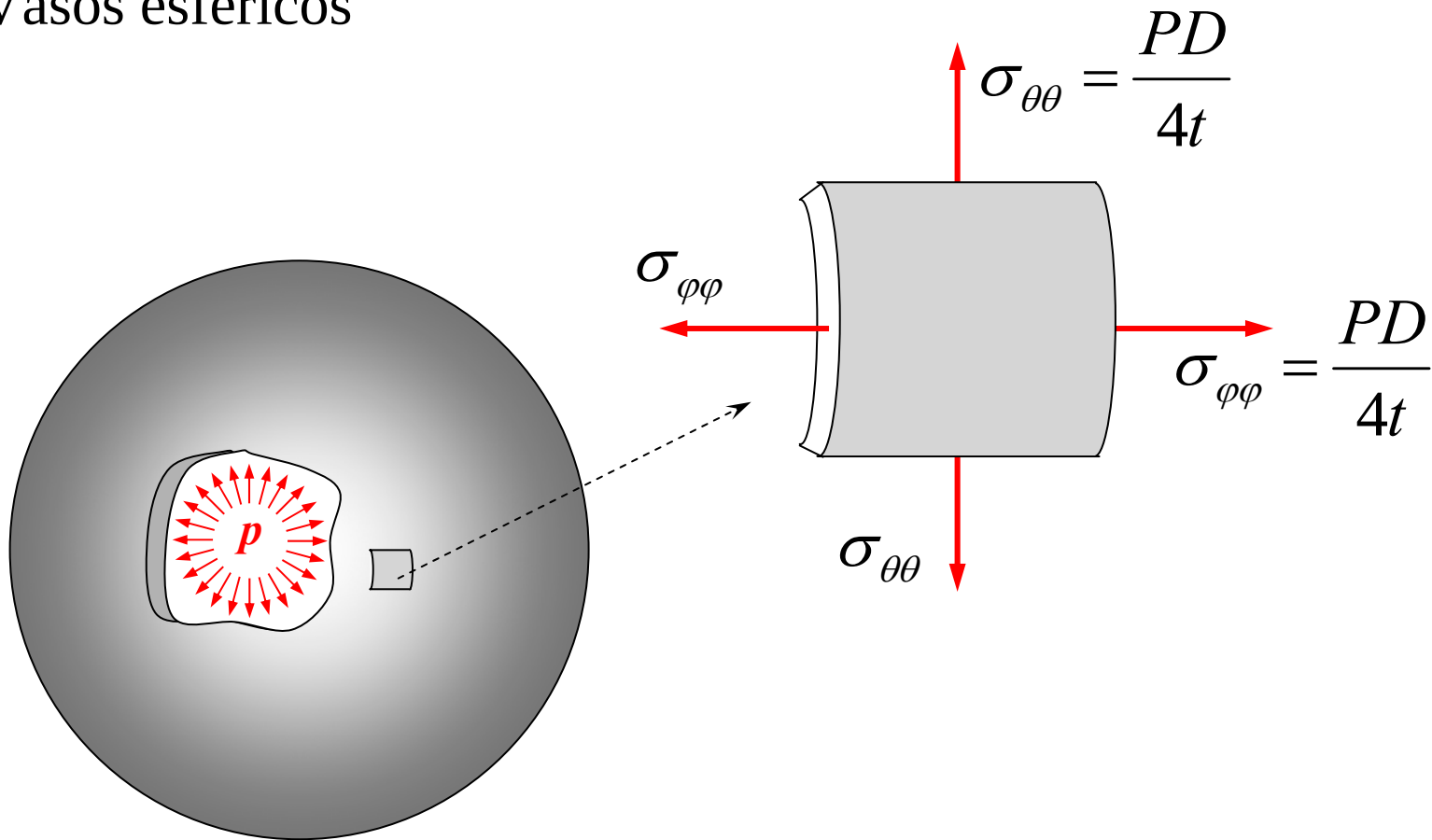
Vasos de Pressão de Paredes Finas ($D \gg t$)

Vasos cilíndricos

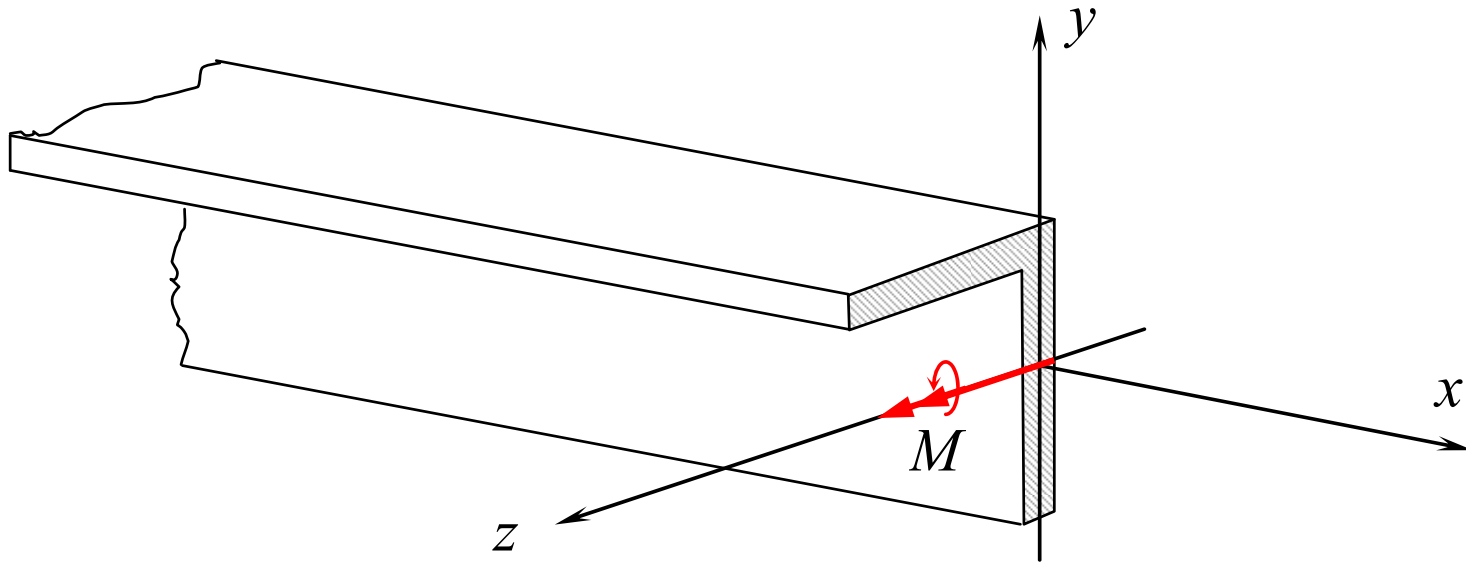


Vasos de Pressão de Paredes Finas ($D \gg t$)

Vasos esféricos



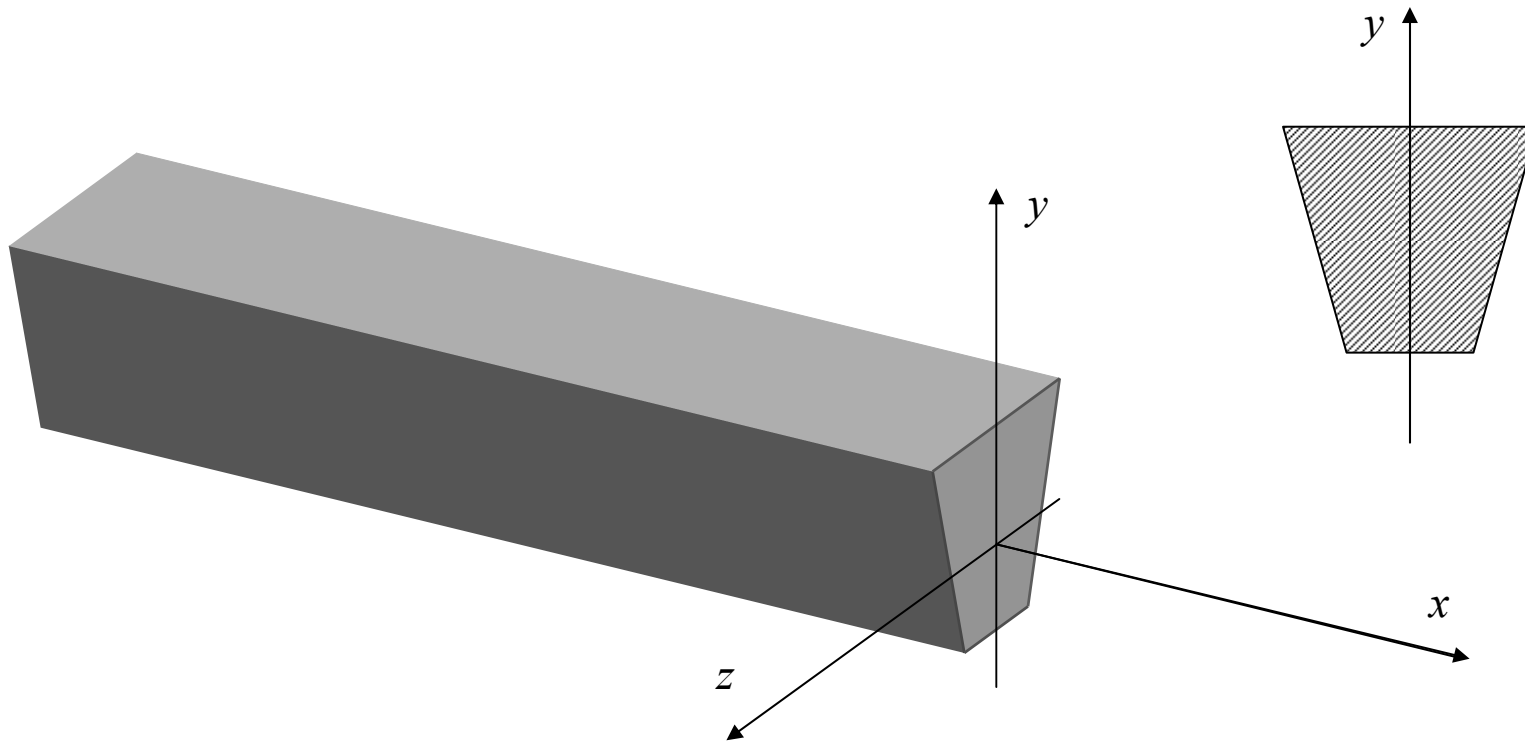
Tensões de Flexão em Barras (vigas)



Momento fletor e esforço cortante atuando na seção transversal de uma viga carregada no plano xy

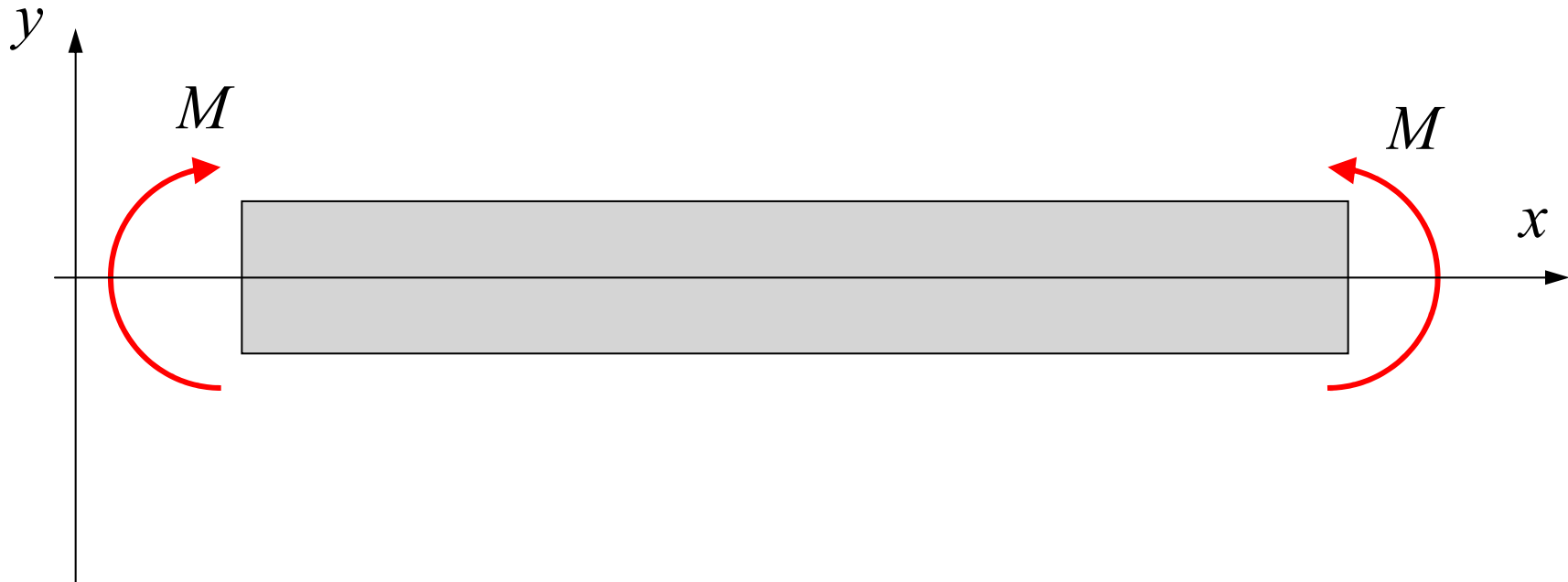
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Seção transversal simétrica em relação ao plano xy



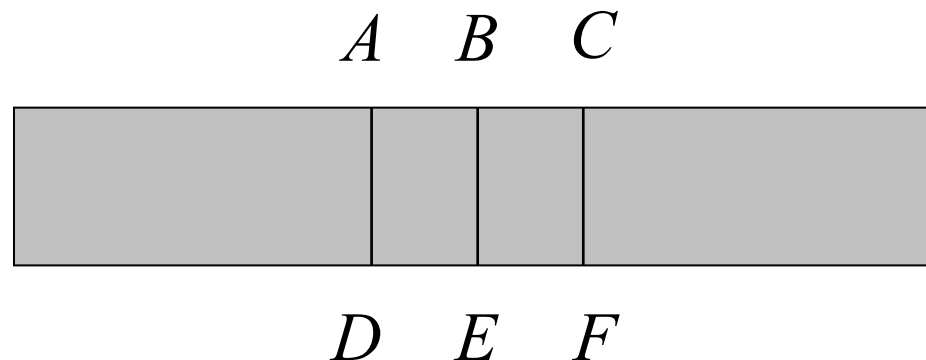
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Flexão Pura



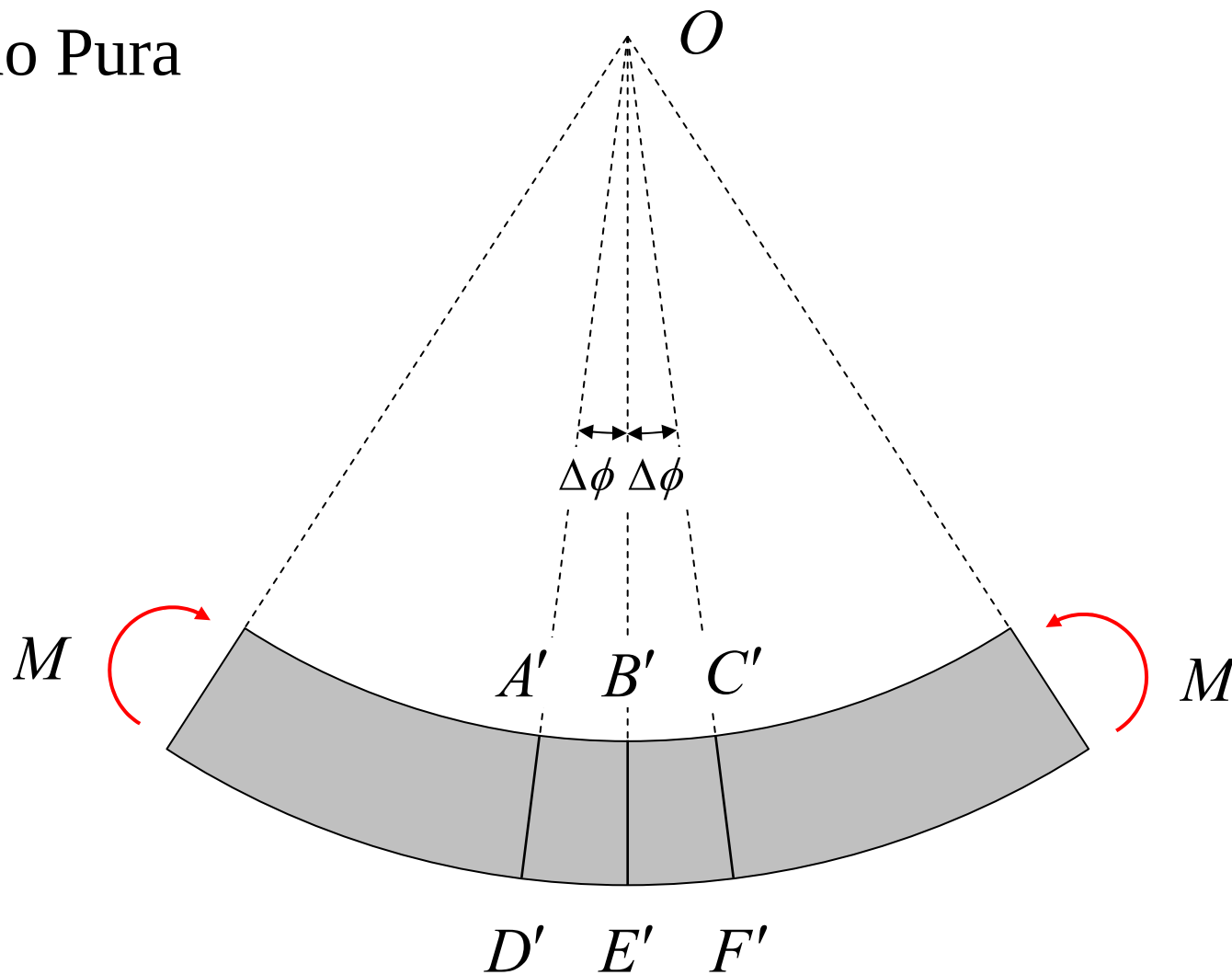
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Flexão Pura (viga de seção transversal simétrica)



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Flexão Pura

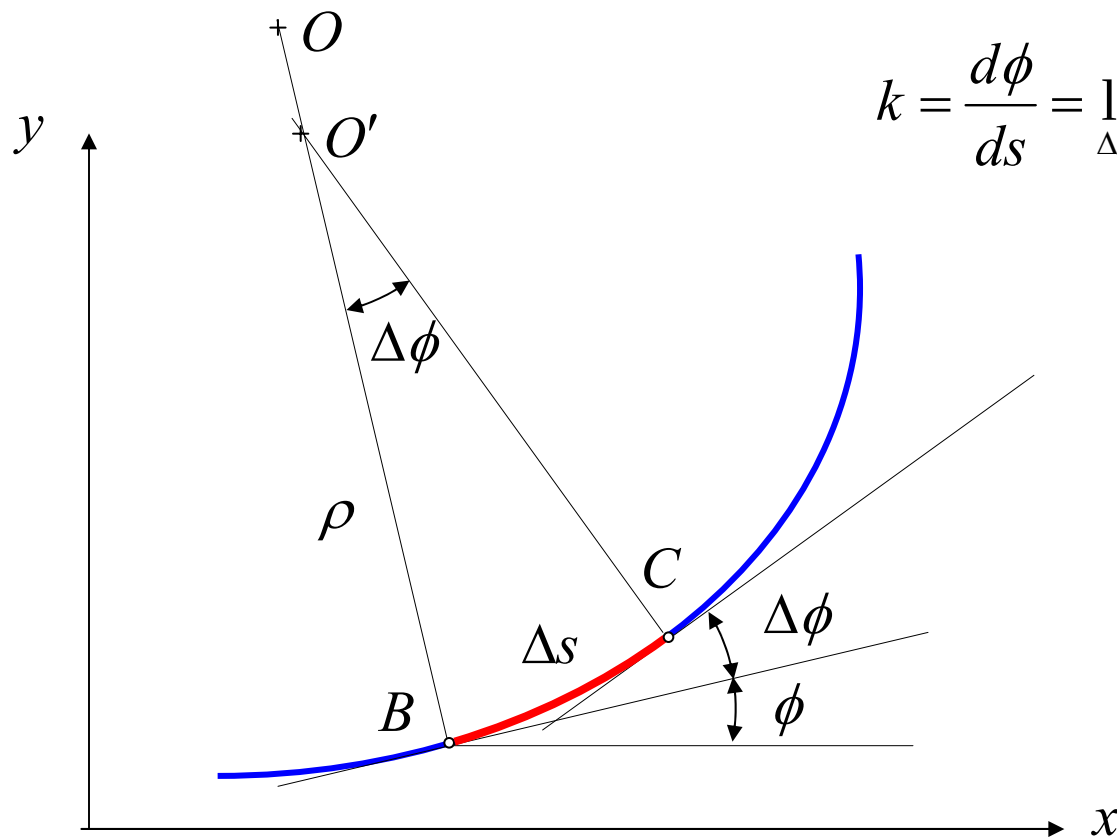


Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Curvatura

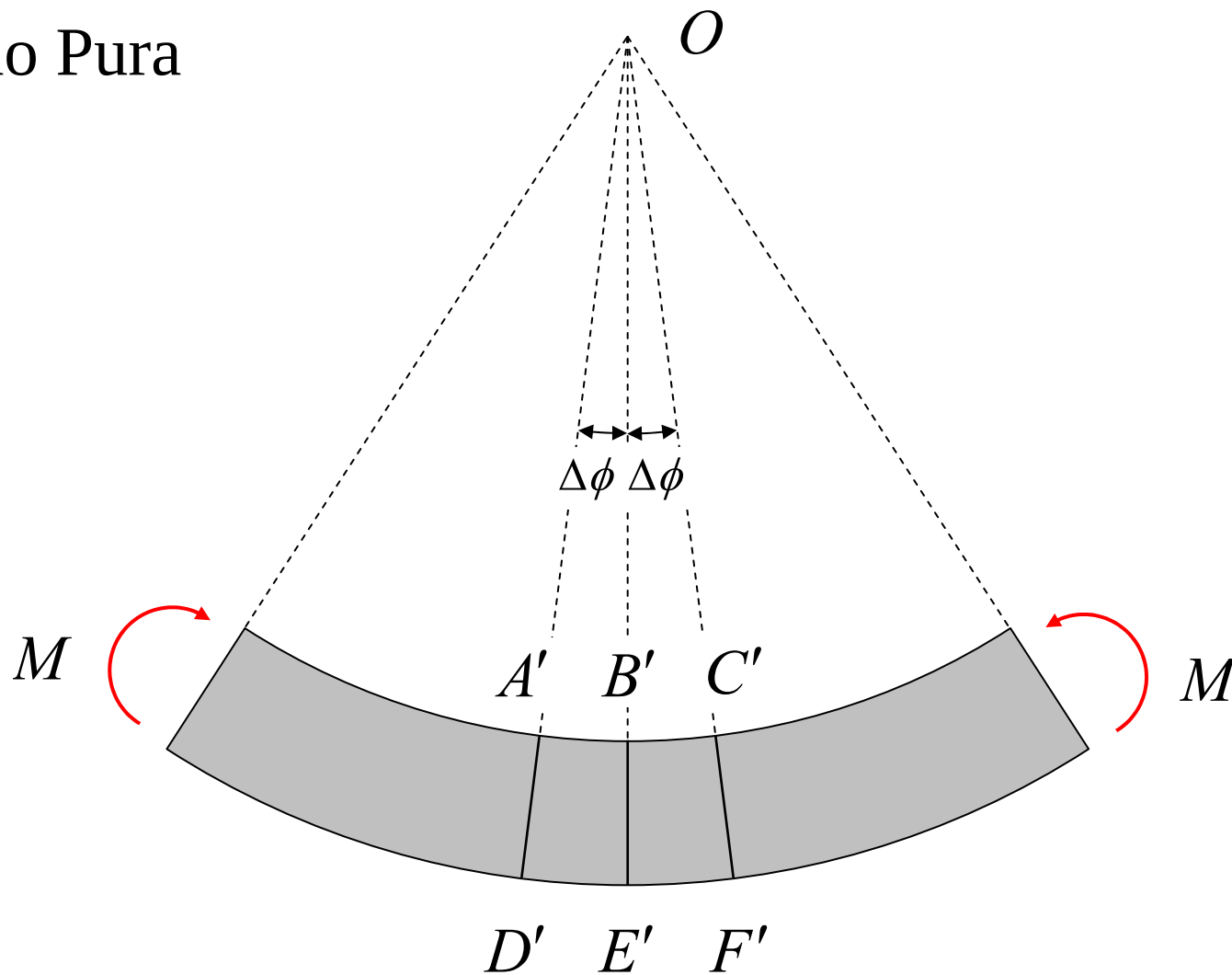
A curvatura no ponto B é definida como:

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{O'B} = \frac{1}{\rho}$$



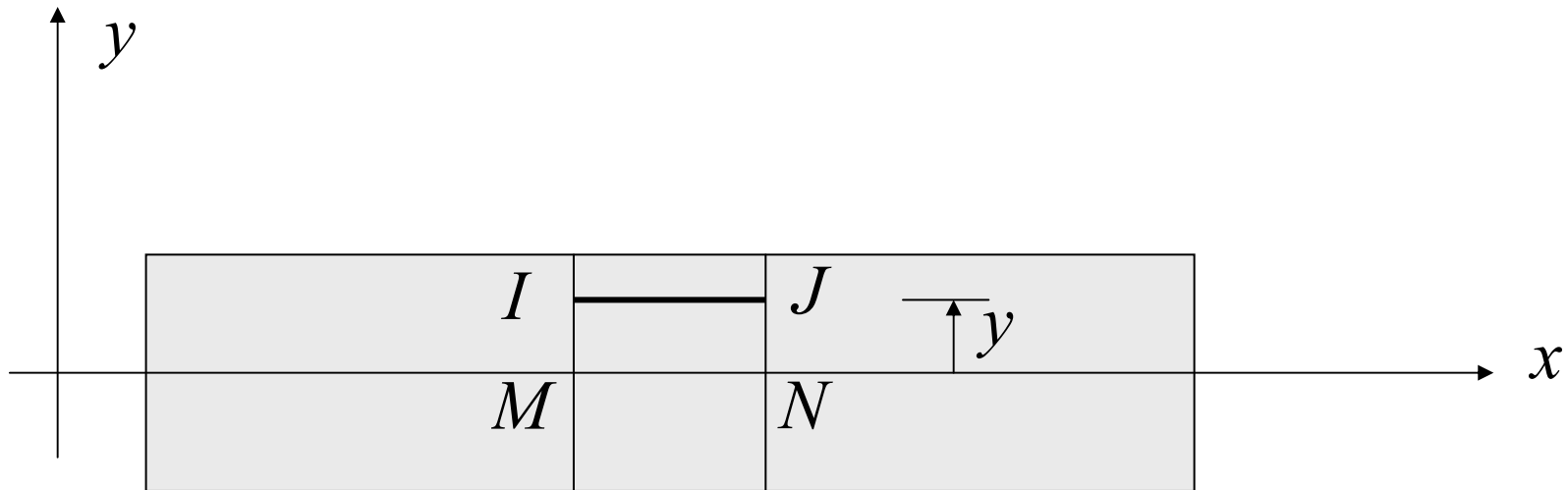
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Flexão Pura



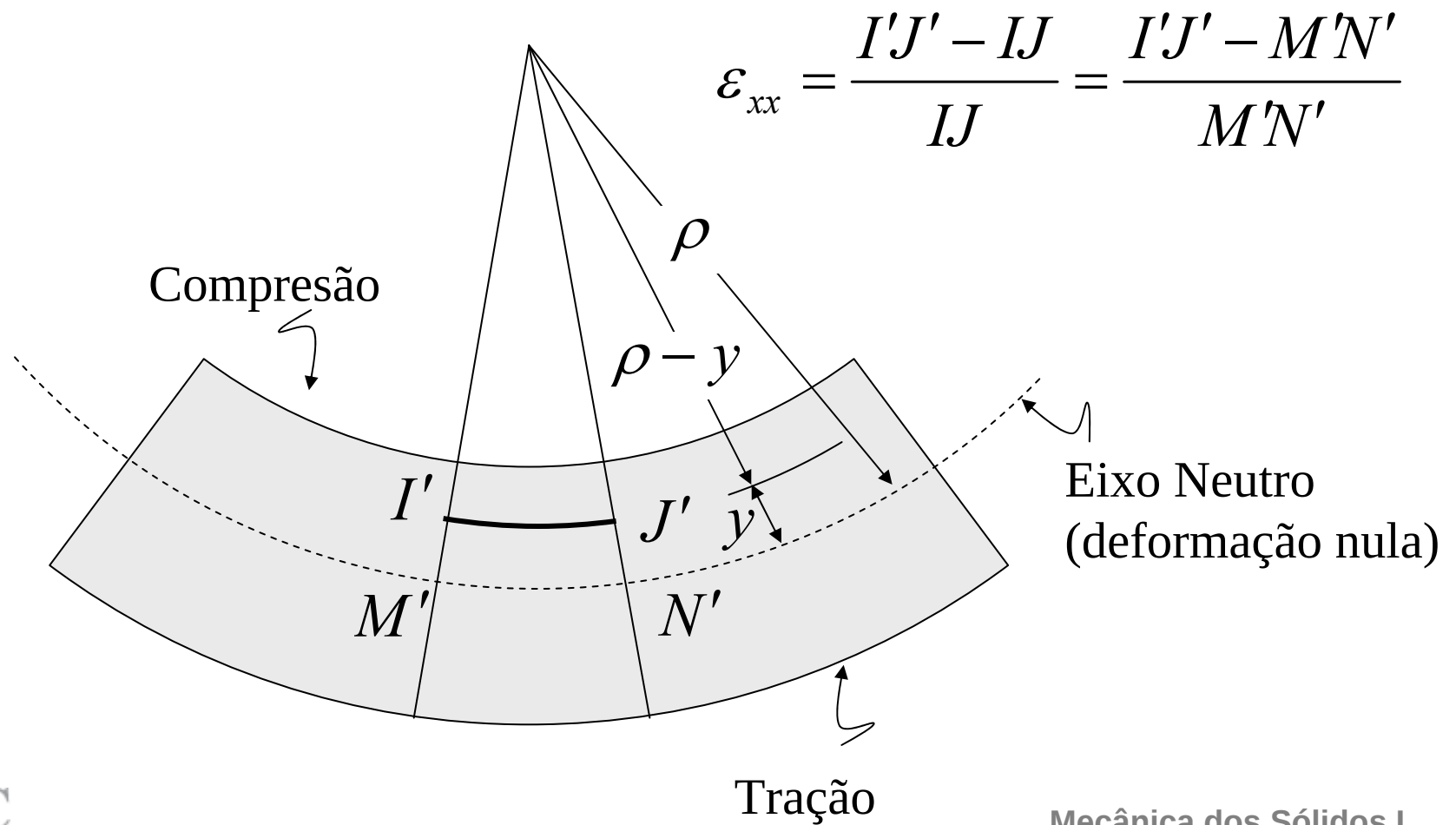
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação do segmento IJ



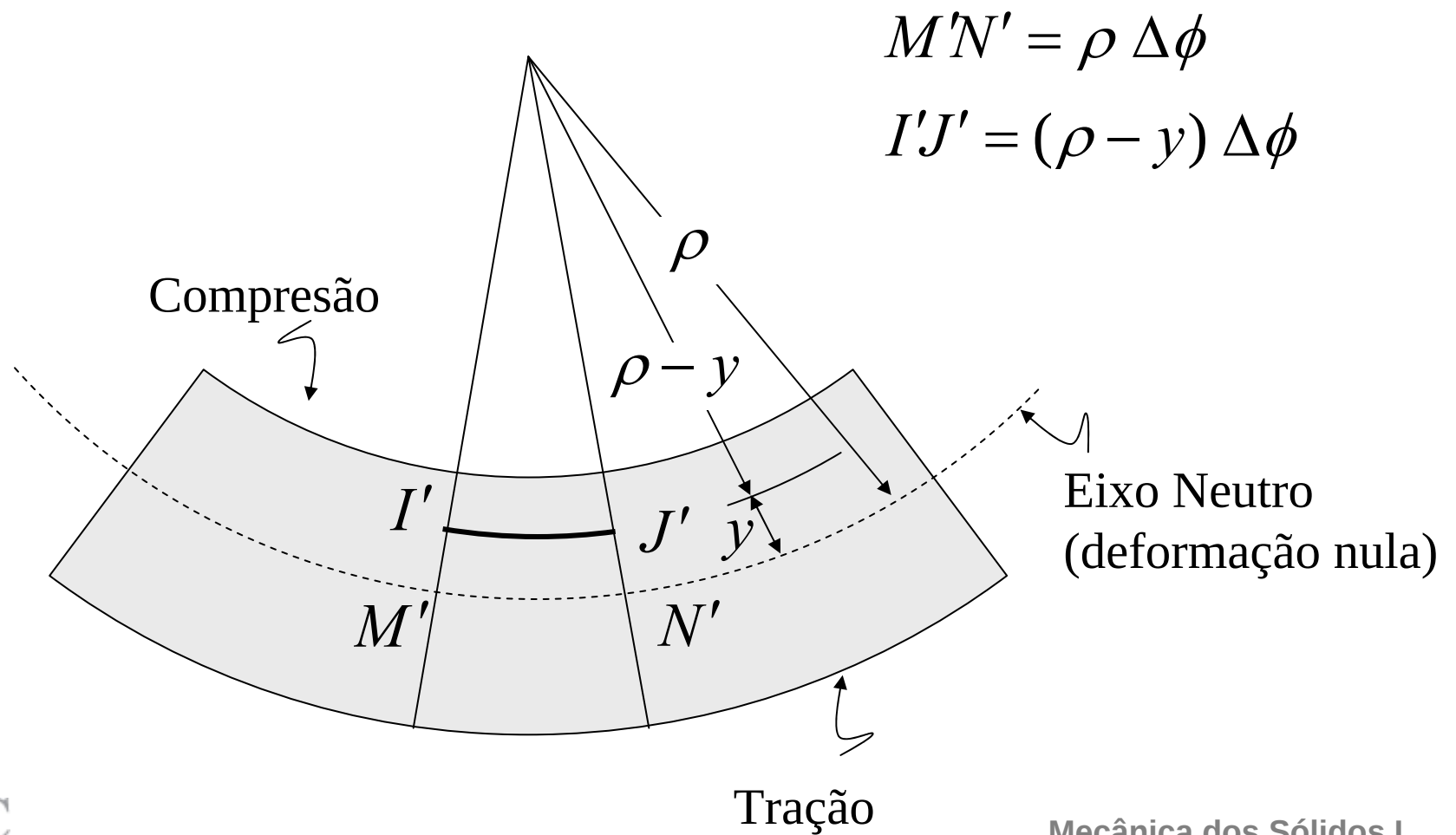
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação do segmento IJ



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação do segmento IJ



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Deformação longitudinal

$$\varepsilon_{xx} = \frac{I'J' - IJ}{IJ} = \frac{I'J' - M'N'}{M'N'}$$

$$M'N' = \rho \Delta\phi$$

$$I'J' = (\rho - y) \Delta\phi$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{d\phi}{dy} y$$

Deformação cisalhante

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = 0$$

Simetria (flexão pura)

Tensões de Flexão em Barras (vigas)

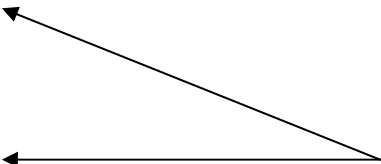
Relação tensão *vs.* deformação

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = -\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} = 0$$

Tensões cisalhantes
são nulas no caso de
flexão pura



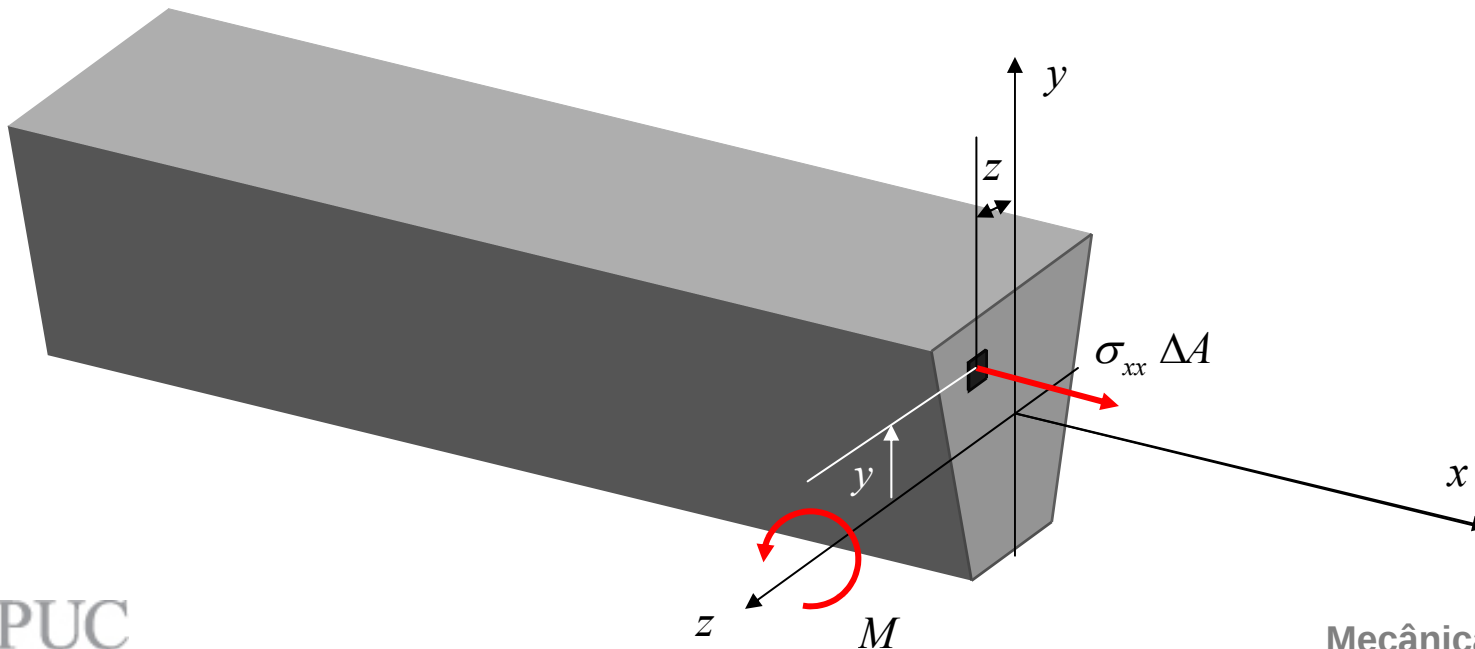
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Equilíbrio

$$\sum F_x = \int_A \sigma_{xx} dA = 0$$

$$\sum M_y = \int_A z \sigma_{xx} dA = 0$$

$$\sum M_z = -\int_A y \sigma_{xx} dA = M$$



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

- Hipótese: $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0$

$$\sigma_{xx} = -E \frac{y}{\rho} = -E \frac{d\phi}{ds} y$$

- Balanço de forças na direção longitudinal

$$\sum F_x = \int_A \sigma_{xx} dA = - \int_A E \frac{y}{\rho} dA = - \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

Eixo neutro está localizado sobre o centróide da área da seção transversal

Tensões de Flexão em Barras (vigas)

- Balanço de momentos na direção y

$$\sum M_y = \int_A z \sigma_{xx} dA = - \int_A E \frac{y}{\rho} z dA = - \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0$$

Simetria da seção transversal
em relação ao plano $xy \Rightarrow \int_A yz dA = 0$

Tensões de Flexão em Barras (vigas)

- Balanço de momentos na direção z

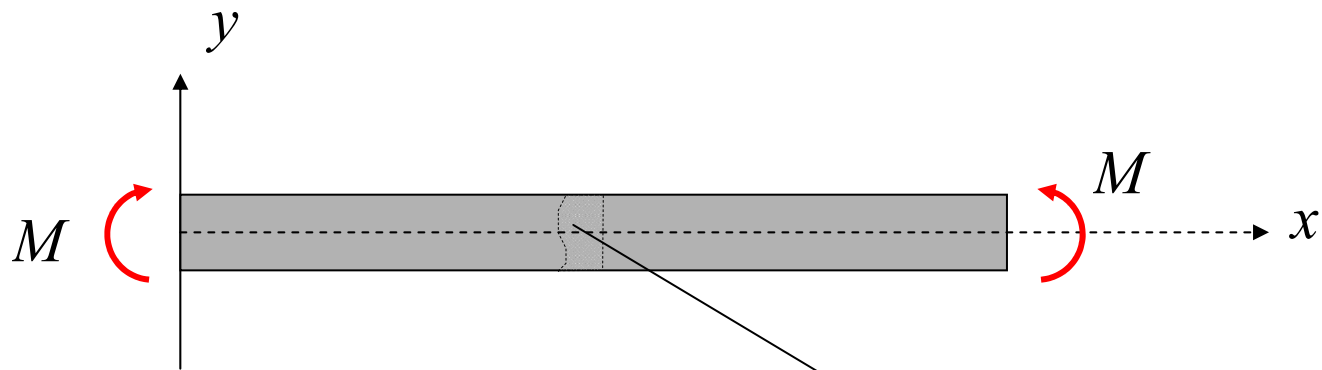
$$\sum M_z = -\int_A y \sigma_{xx} dA = \int_A E \frac{y^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M$$

$$I = \int_A y^2 dA \quad \text{Momento de inércia da área da seção transversal}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = -y \frac{M}{EI} \\ \sigma_{xx} = -y \frac{M}{I} \end{cases}$$

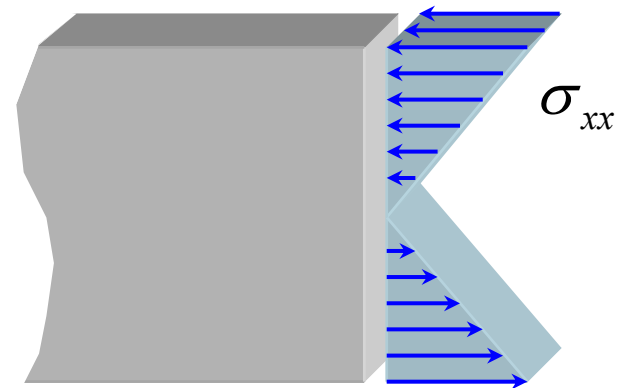
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Tensões Normais de Flexão



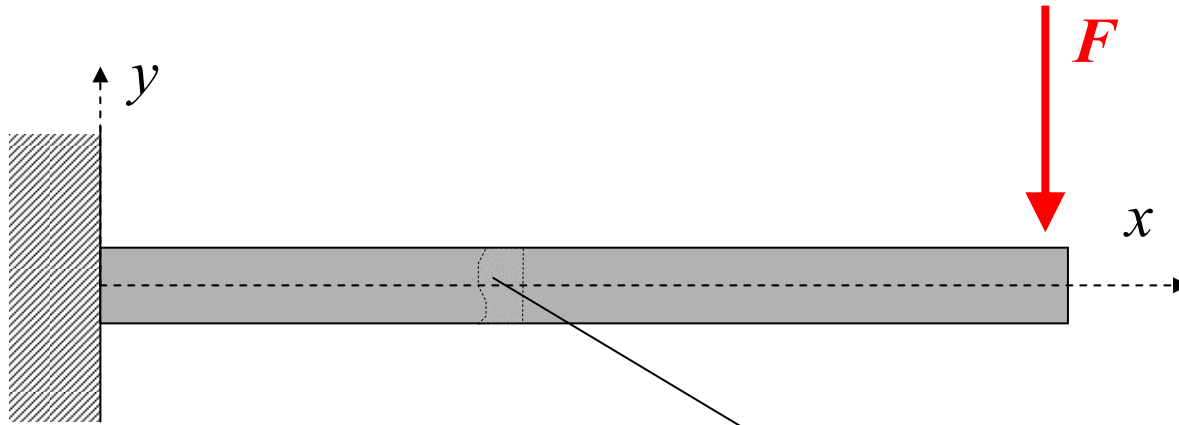
$$[\sigma(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(y) = -y \frac{M}{I}$$



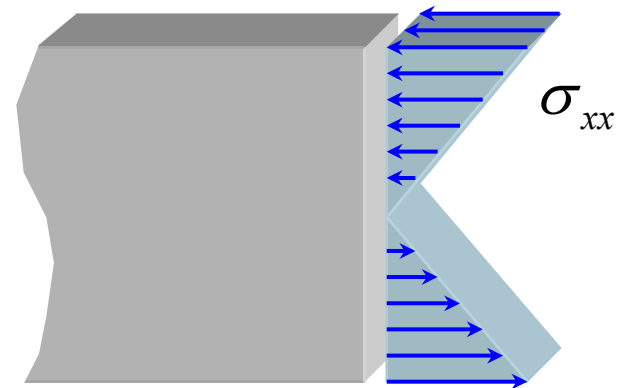
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Tensões Normais de Flexão



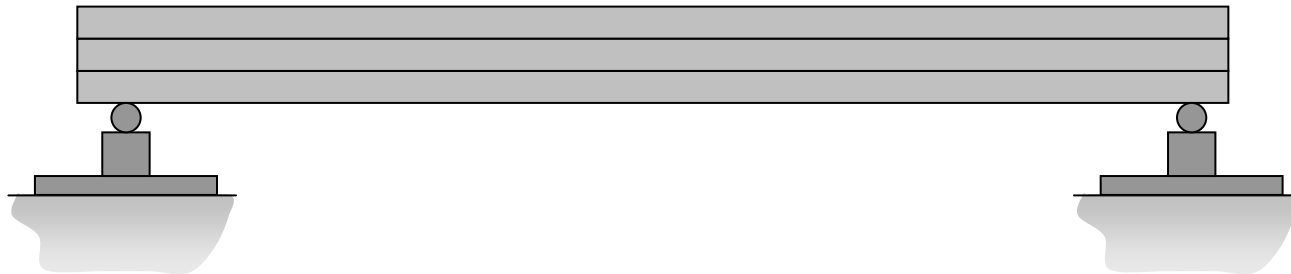
$$[\sigma(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = -y \frac{M(x)}{I}$$



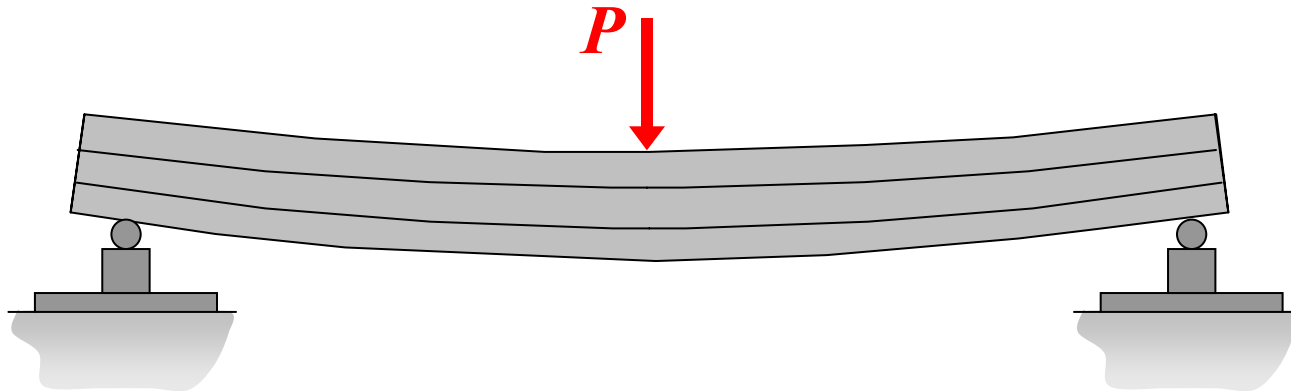
Flexão de Vigas

Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Flexão de Vigas

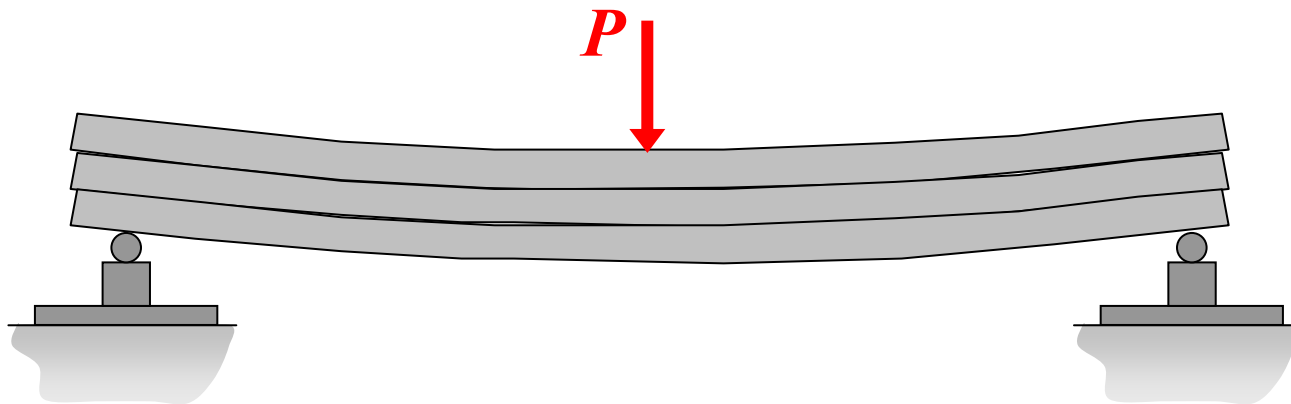
Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Lâminas “Coladas”

Flexão de Vigas

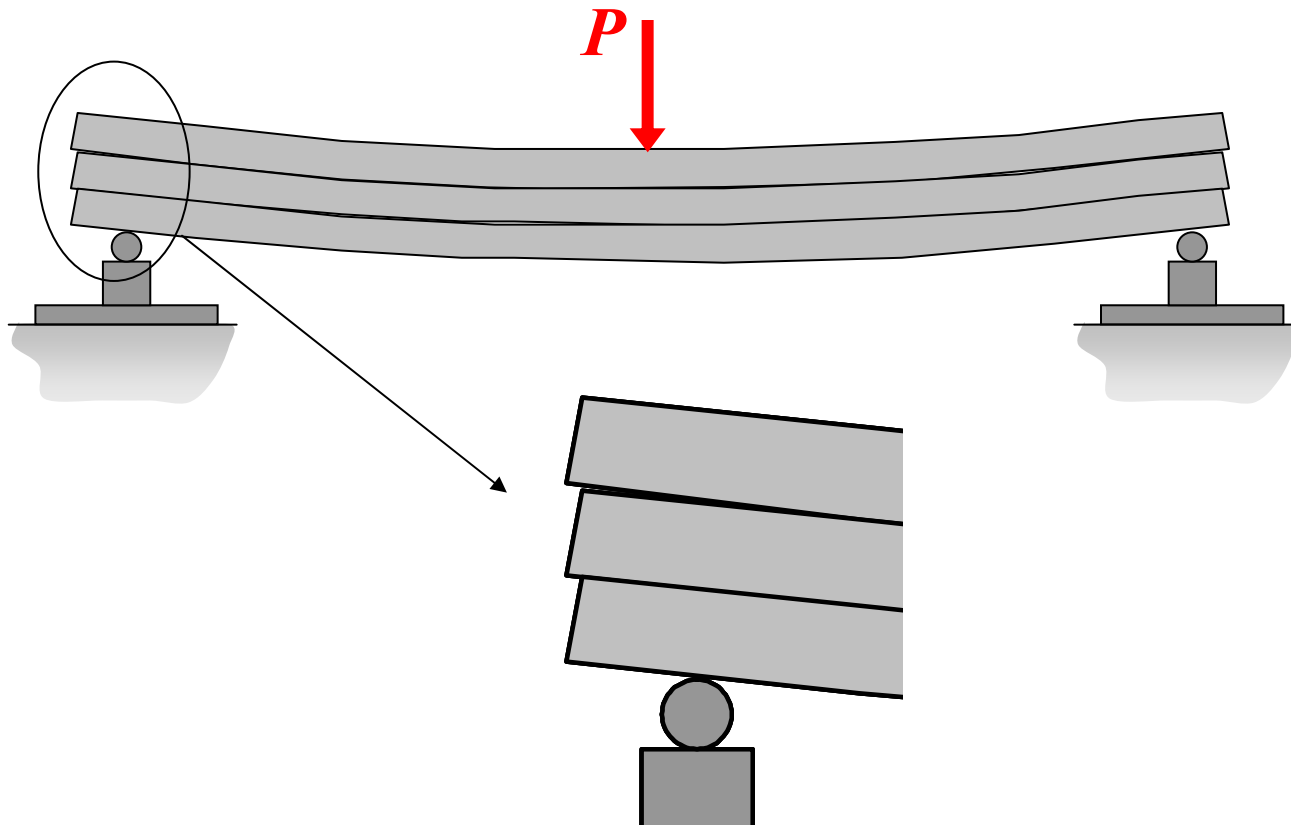
Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Lâminas Independentes

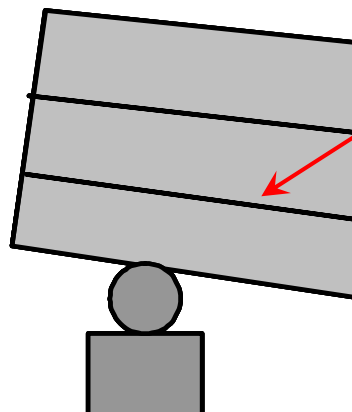
Flexão de Vigas

Tensões de Cisalhamento devido à flexão



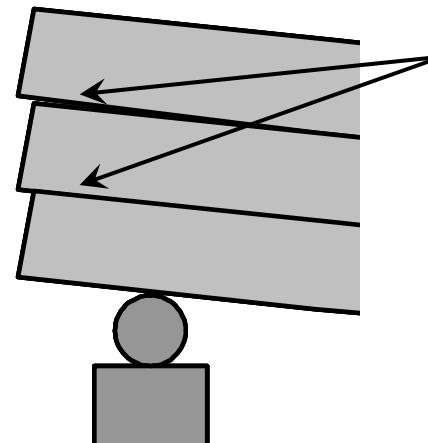
Flexão de Vigas

Tensões de Cisalhamento devido à flexão



Lâminas “Coladas”

Tensões de cisalhamento horizontais impedem o deslizamento entre as lâminas

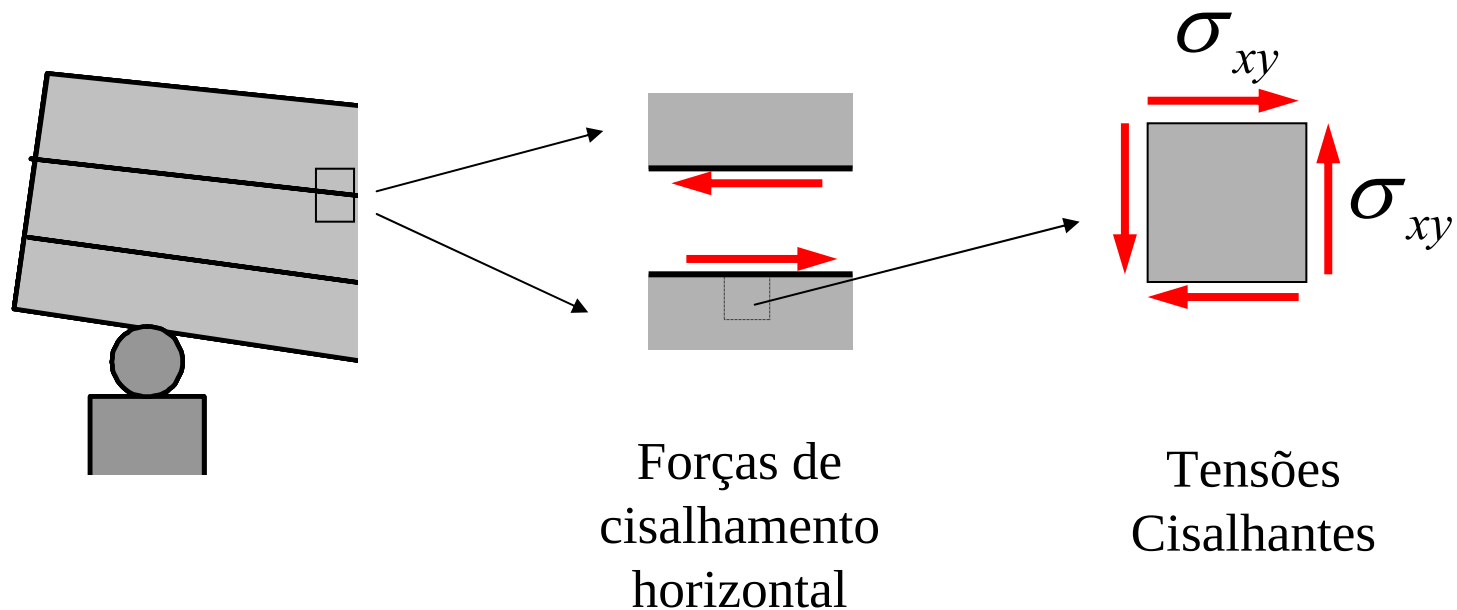


Lâminas Independentes

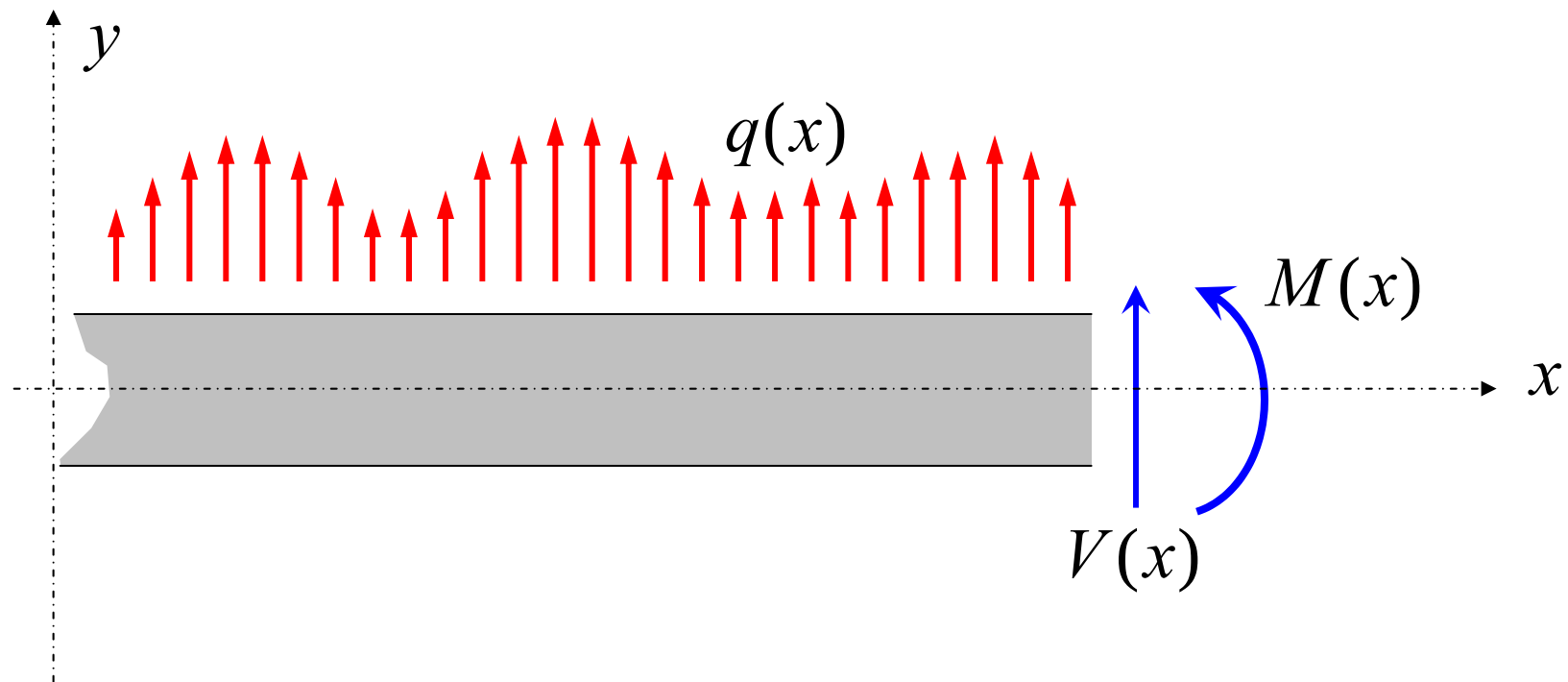
Lâminas deslizam umas sobre as outras

Flexão de Vigas

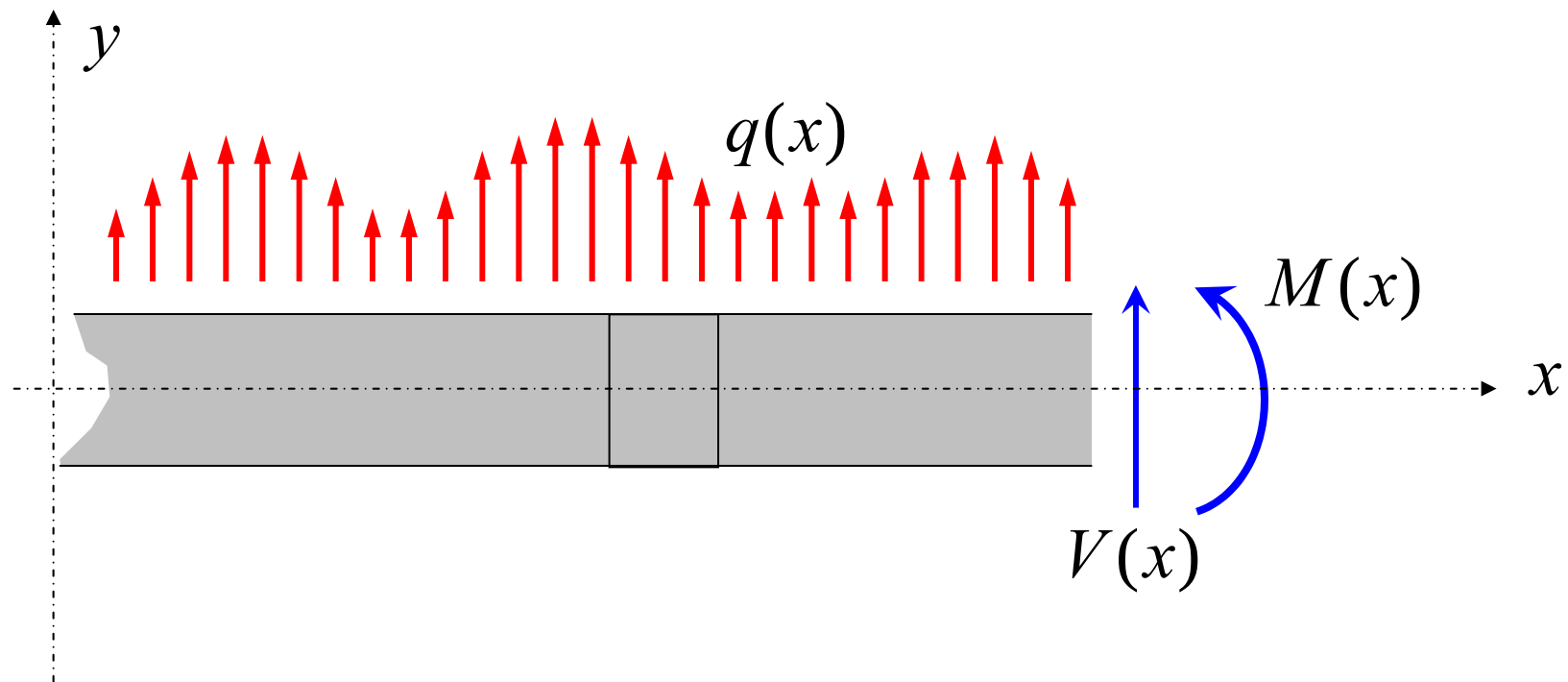
Tensões de Cisalhamento devido à flexão



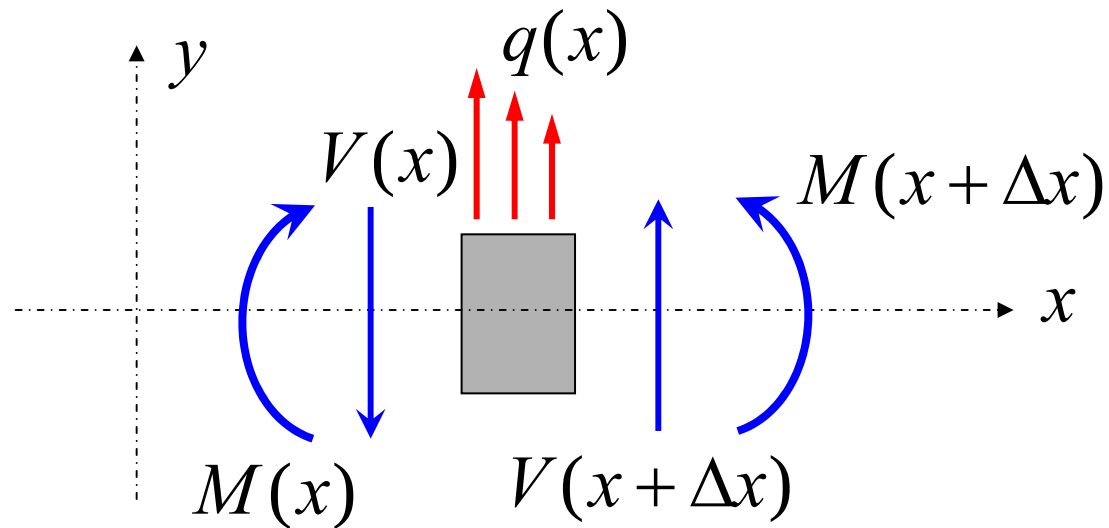
Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão



Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

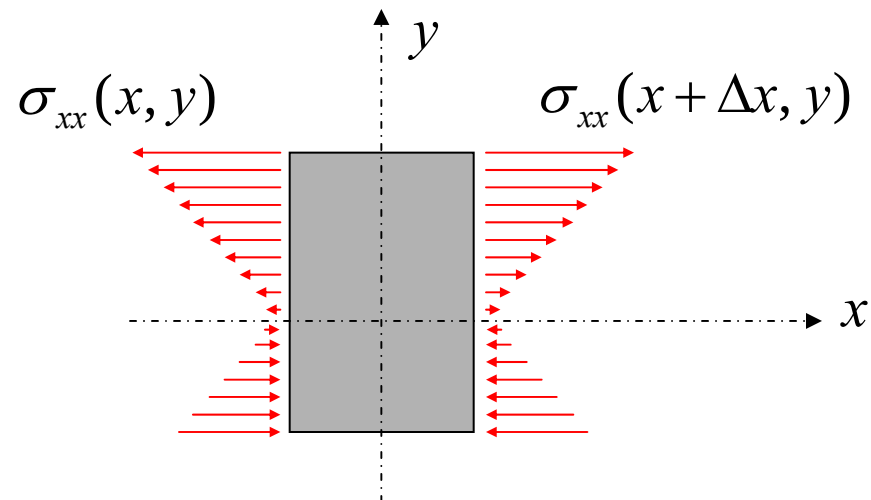
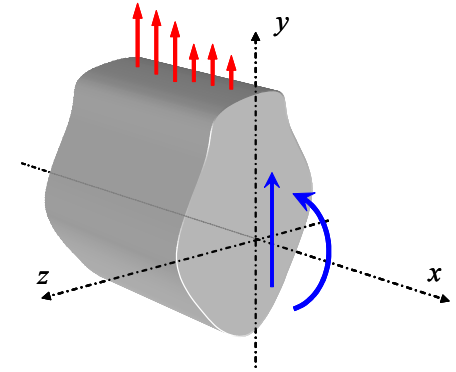


Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão



Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Equilíbrio horizontal (direção x)



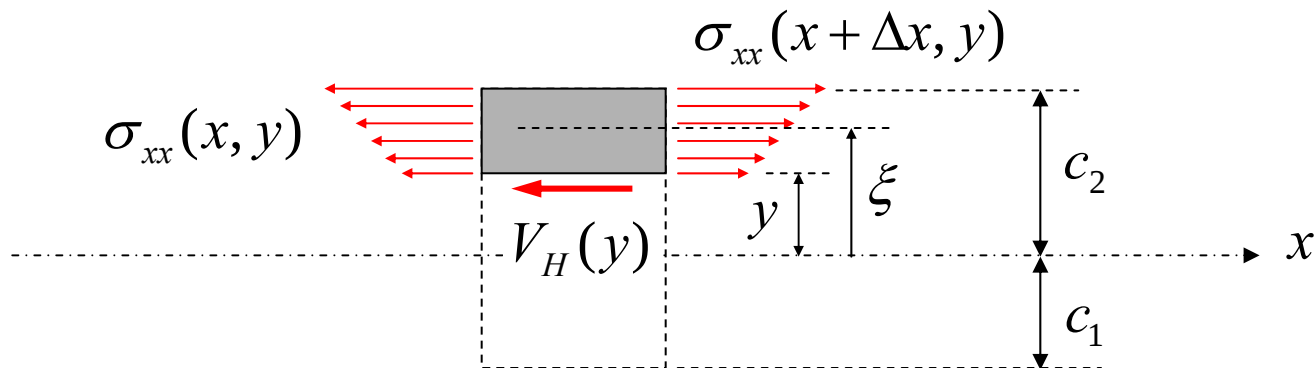
Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Equilíbrio horizontal (direção x)

$$-V_H(y) - \int_y^{c_2} \sigma_{xx}(x, \xi) dA + \int_y^{c_2} \sigma_{xx}(x + \Delta x, \xi) dA = 0$$

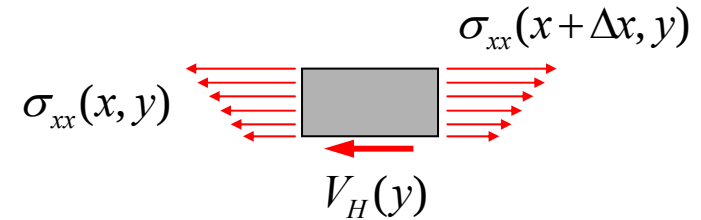
$$y < \xi < c_2$$

$$-c_1 < y < c_2$$



Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Equilíbrio horizontal (direção x)



$$-V_H(y) - \int_y^{c_2} \sigma_{xx}(x, \xi) dA + \int_y^{c_2} \sigma_{xx}(x + \Delta x, \xi) dA = 0$$

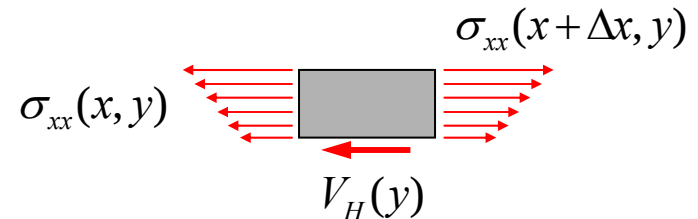
$$V_H(y) = \sigma_{xy}(y) b(y) \Delta x$$

$$\sigma_{xx}(x, \xi) = -\xi \frac{M(x)}{I}$$

$$\sigma_{xx}(x + \Delta x, \xi) = -\xi \frac{M(x + \Delta x)}{I}$$

Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Equilíbrio horizontal (direção x)



$$-\sigma_{xy}(y) b(y) \Delta x + \frac{M(x)}{I} \int_y^{c_2} \xi dA - \frac{M(x + \Delta x)}{I} \int_y^{c_2} \xi dA = 0$$

definindo $Q(y) = \int_y^{c_2} \xi dA$

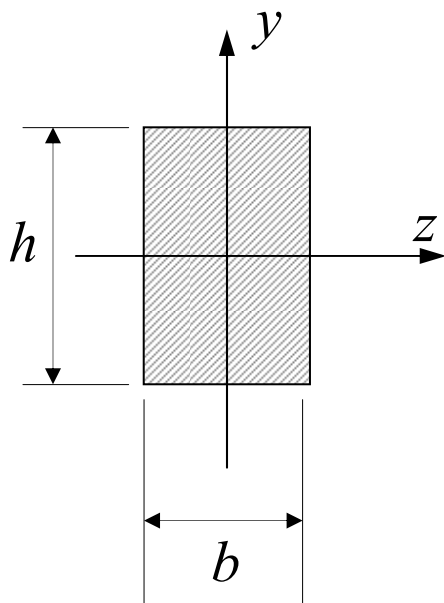
$$\sigma_{xy}(y) = -\frac{Q(y)}{I b(y)} \left(\frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} \right) = -\frac{Q(y)}{I b(y)} \frac{\Delta M}{\Delta x}$$

fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ e recordando que $V(x) = -dM/dx$

$$\sigma_{xy}(y) = V(x) \frac{Q(y)}{b(y) I}$$

Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Exemplo: Viga de seção retangular



$$b(y) = b, -h/2 < y < h/2, I = bh^3/12, dA = b d\xi$$

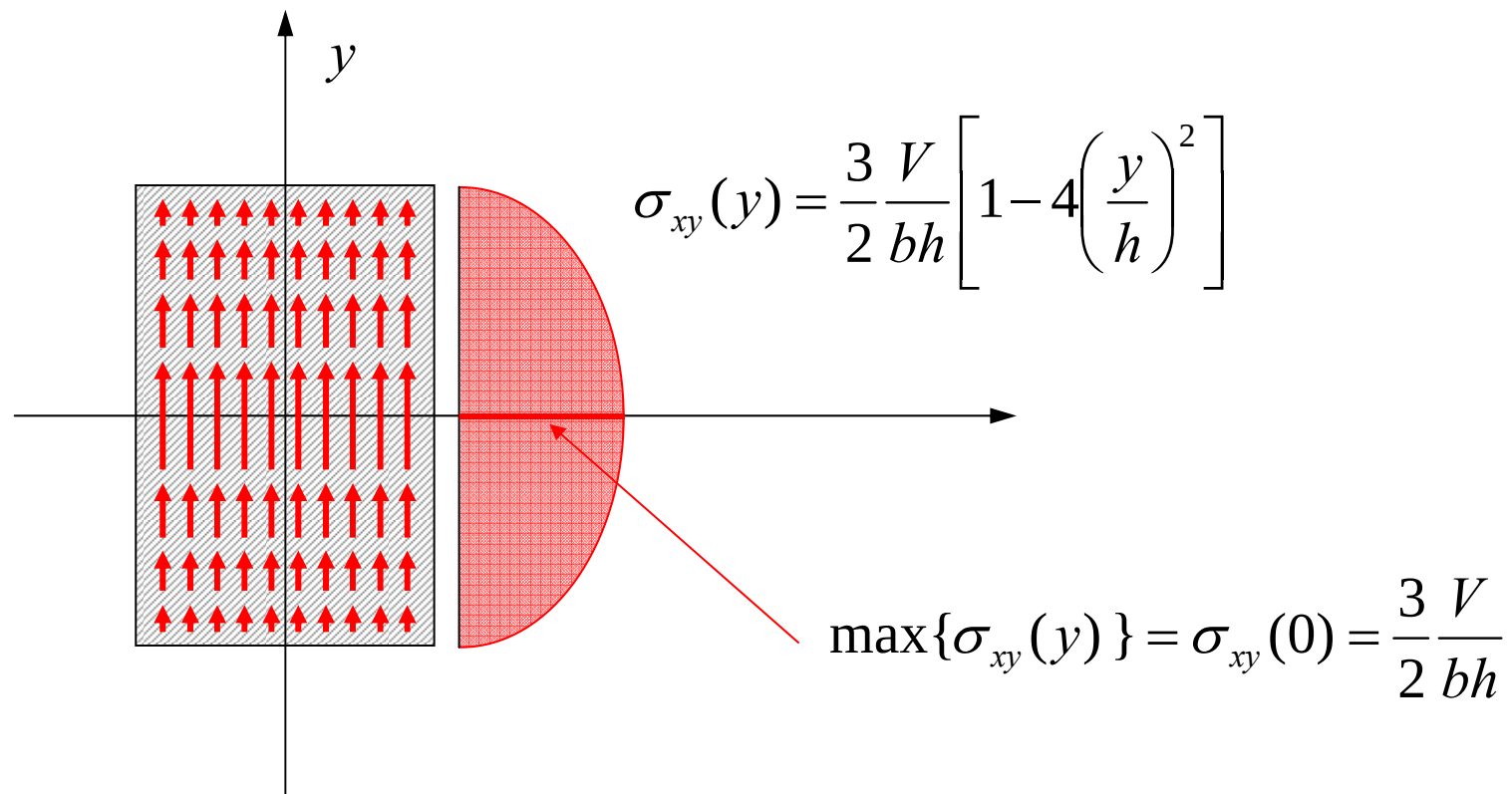
$$Q(y) = b \int_y^{h/2} \xi d\xi = \frac{bh^2}{8} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_{xy}(y) = V(x) \frac{Q(y)}{b(y) I}$$

$$\sigma_{xy}(y) = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Viga de seção retangular:



Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão

Viga de seção Circular:

