Departamento de Engenharia Mecânica

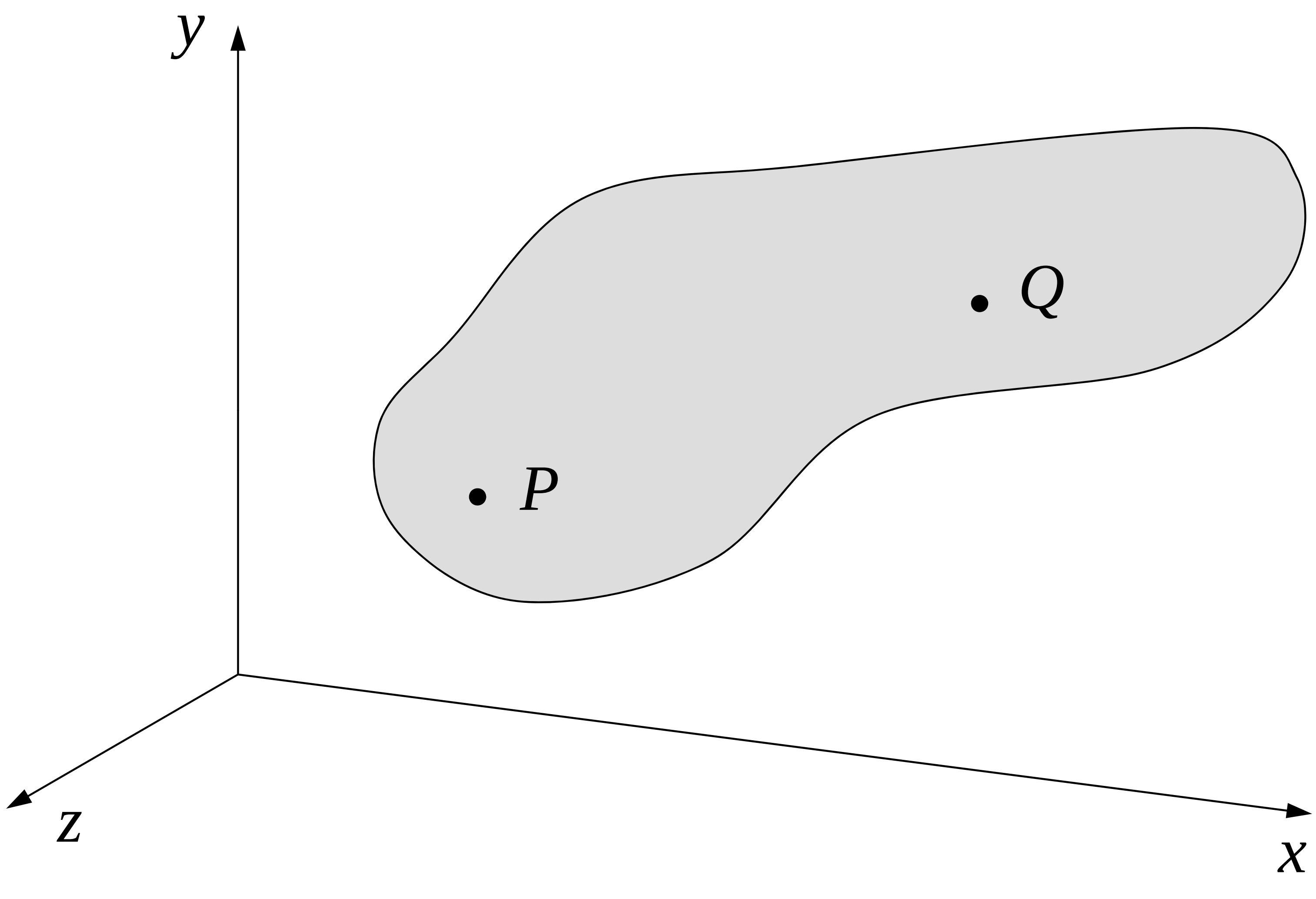
Mecânica dos Sólidos I

Parte 4 – Análise de Deformações

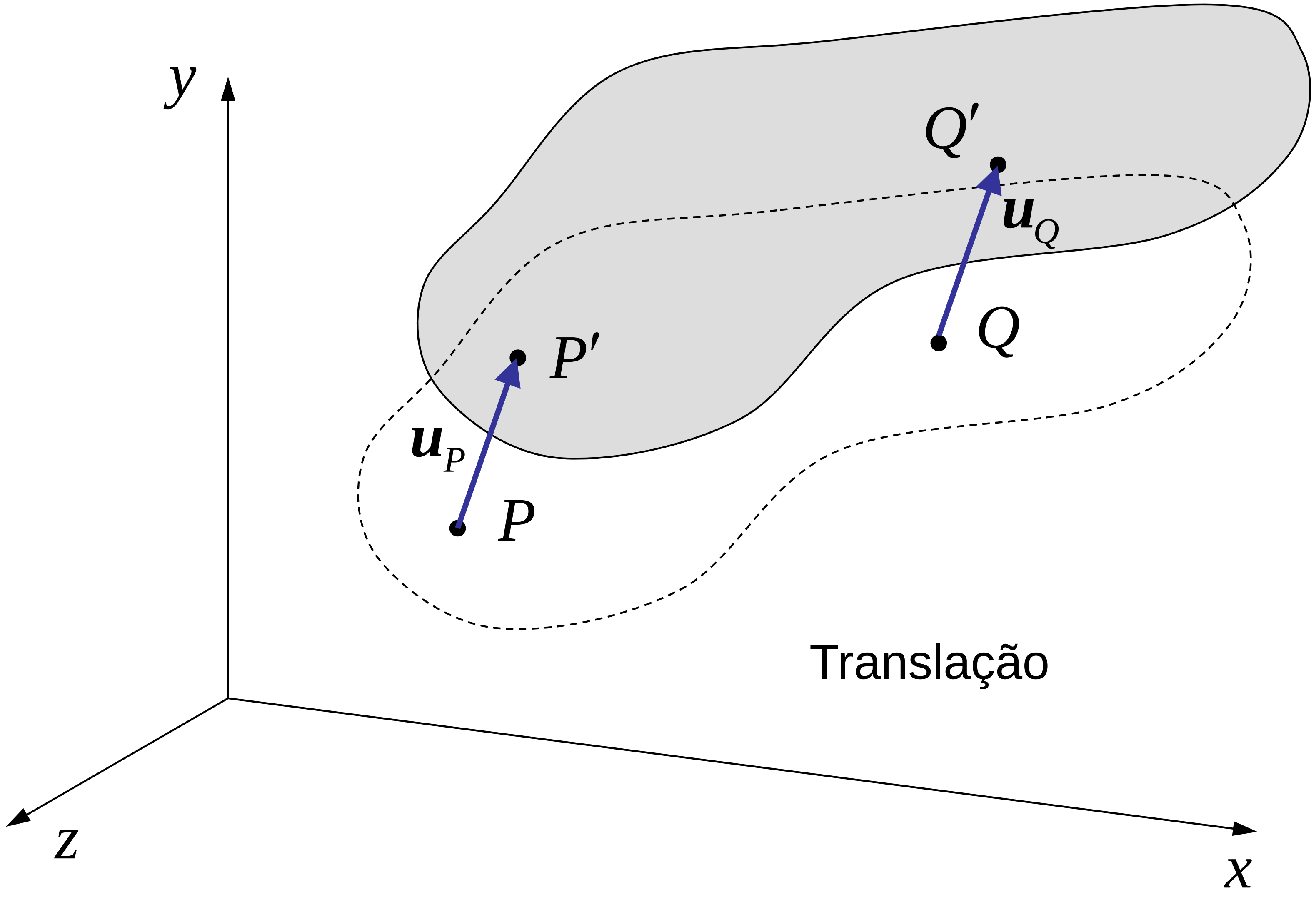
Prof. Arthur M. B. Braga

2009.1

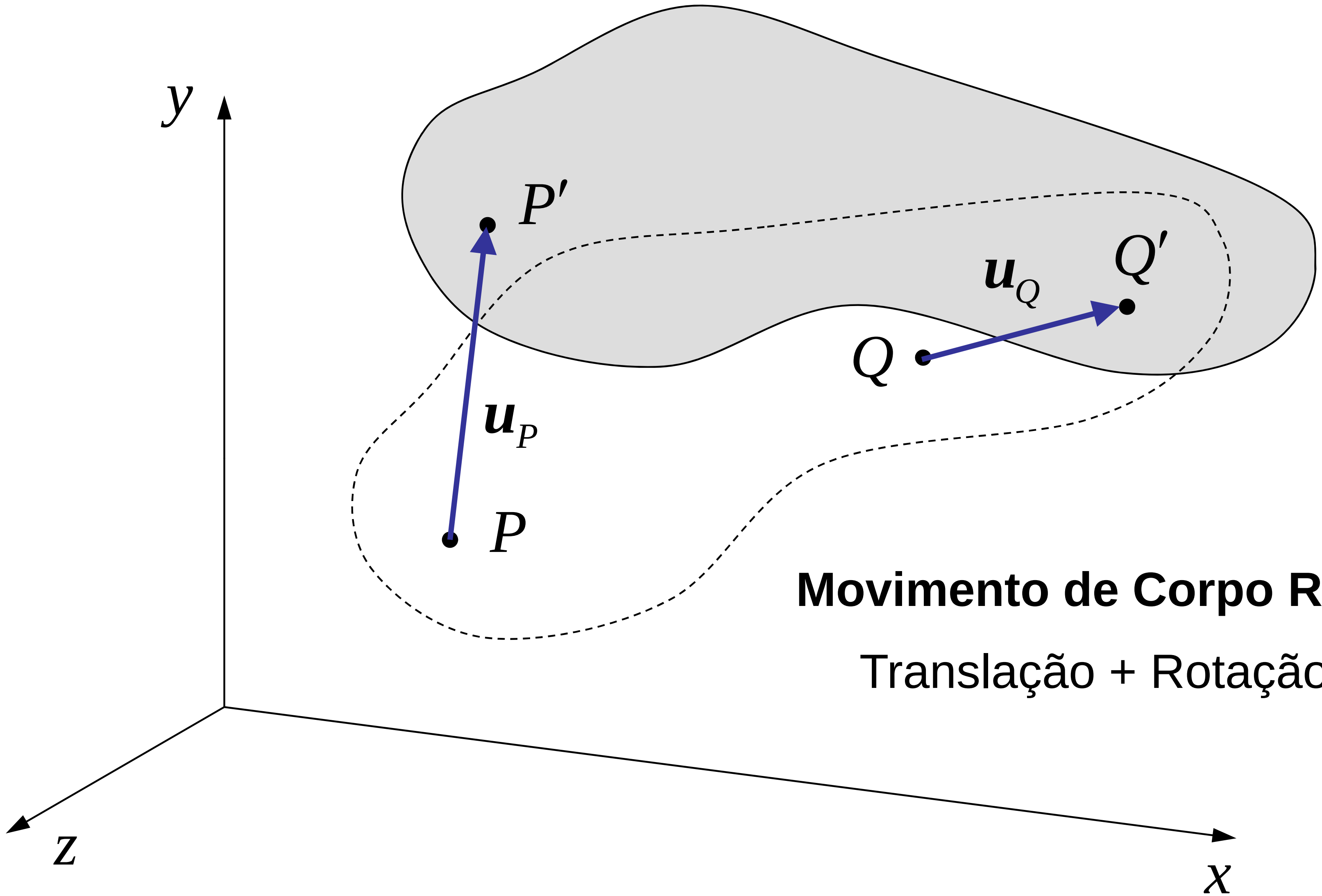
Deslocamento



Deslocamento



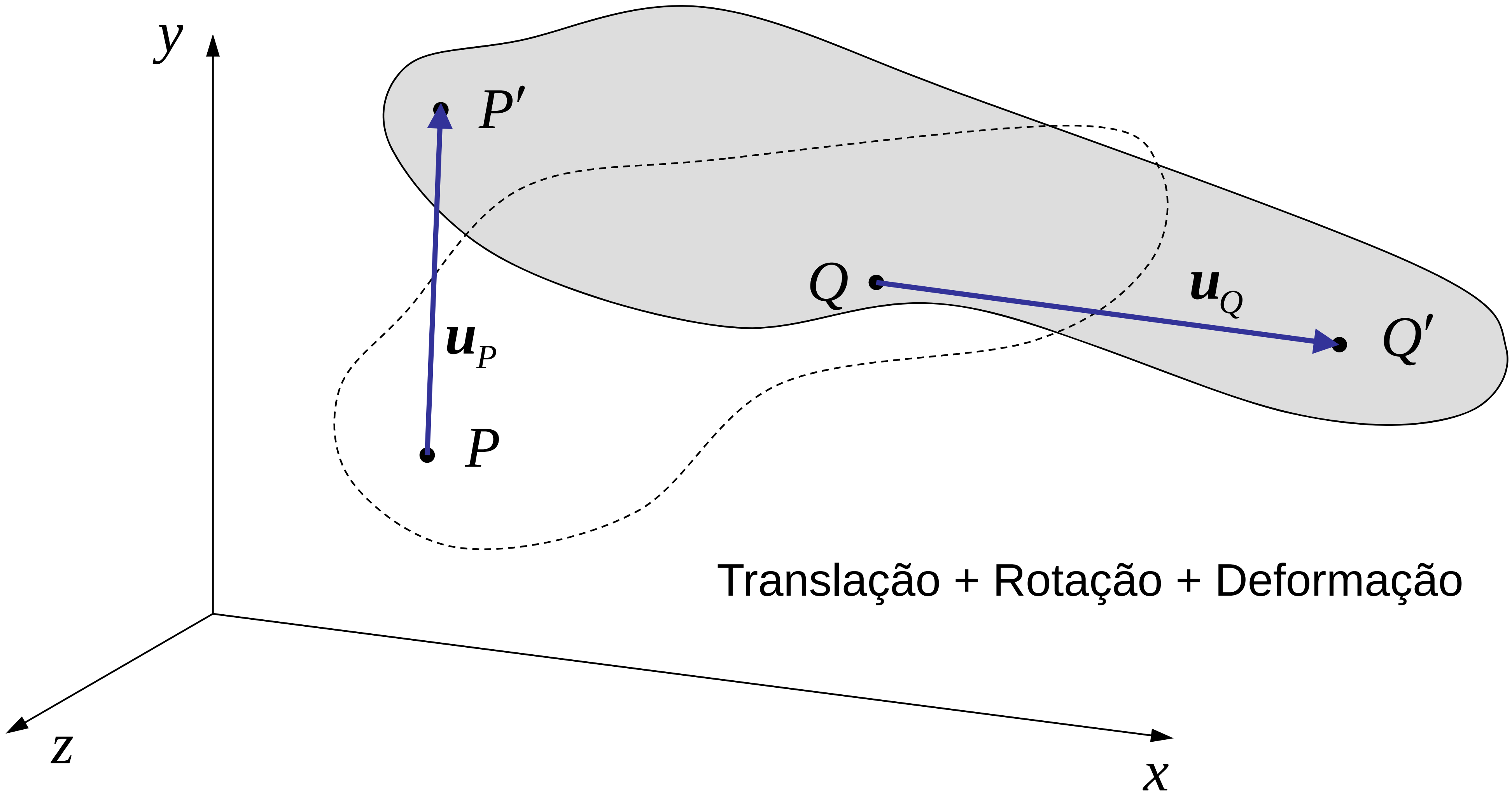
Deslocamento



Movimento de Corpo Rígido

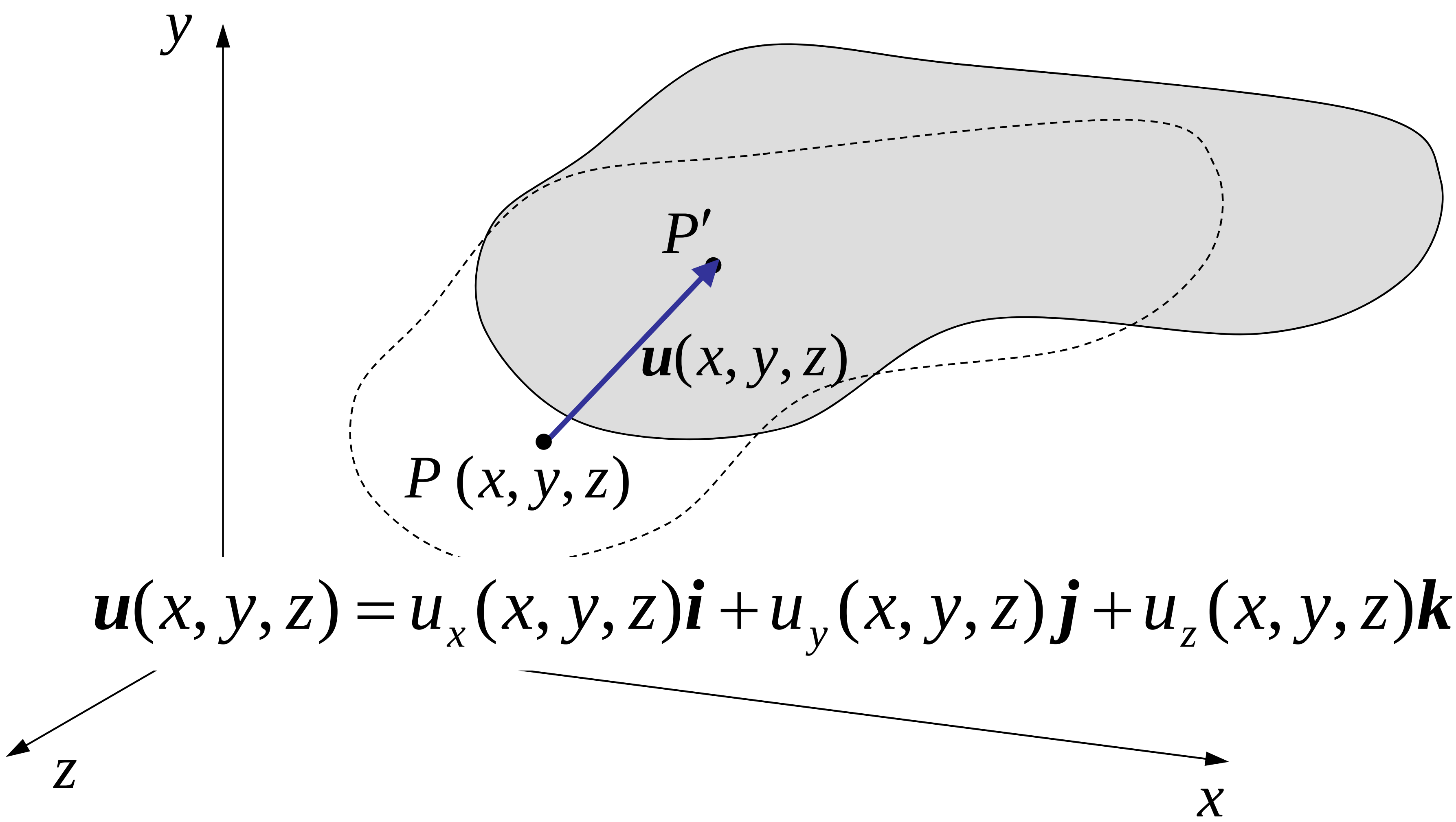
Translação + Rotação

Deslocamento



Translação + Rotação + Deformação

Deslocamento



$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = u_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + u_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + u_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

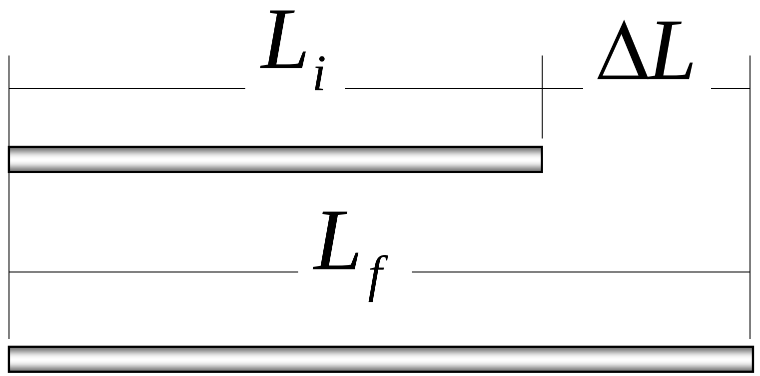
Deslocamento

Deslocamento é uma grandeza vetorial (o campo de deslocamentos):

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = u_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + u_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + u_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

u_x, u_y, e u_z são as componentes do vetor deslocamento nas direções x, y e z.

Deformação – 1D



Medidas de Deformação

1) Lagrangeana

$$\varepsilon_L = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \Delta L / L_i$$

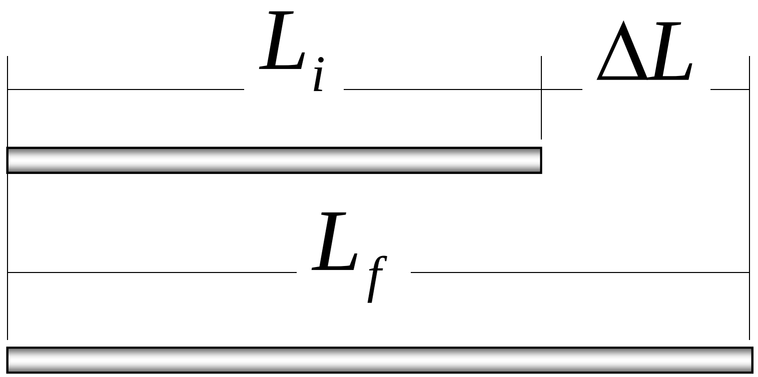
2) Euleriana

$$\varepsilon_E = \frac{L_f - L_i}{L_f} = \Delta L / L_f$$

3) Logaritimica

$$\varepsilon_{\log} = \ln\left(\frac{L_f}{L_i}\right)$$

Deformação – 1D



Grandes deformações

Pequenas deformações

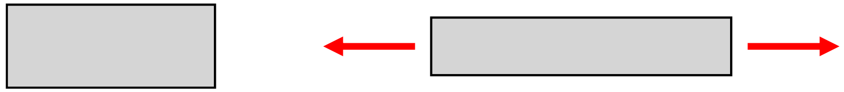
$$\varepsilon_L = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \Delta L / L_i$$

$$\varepsilon_E = \frac{L_f - L_i}{L_f} = \Delta L / L_f$$

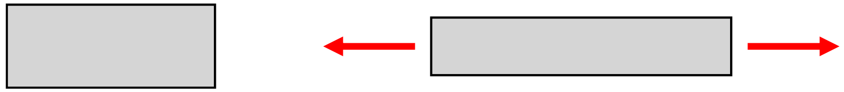
$$\varepsilon_{\log} = \ln\left(\frac{L_f}{L_i}\right)$$

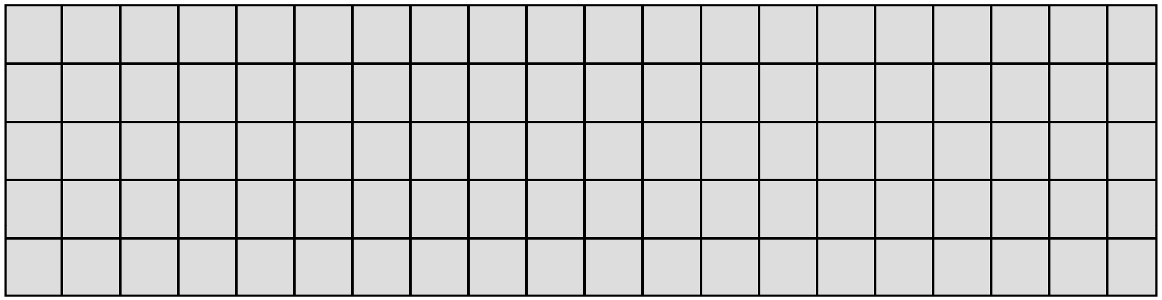
L_i	1,0 m	1,0 m	1,0 m	1,0 m
L_f	2,0 m	0,5 m	1,001 m	0,999 m
ε_L	100%	- 50%	0,10%	- 0,10%
ε_E	50%	-100%	0,10%	- 0,10%
$\varepsilon_{\log}$	69,3%	- 69,3%	0,10%	- 0,10%

Deformação – 2D

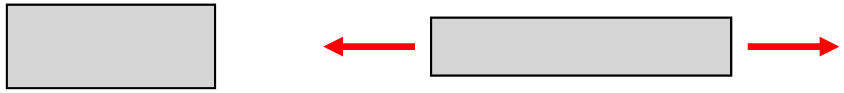


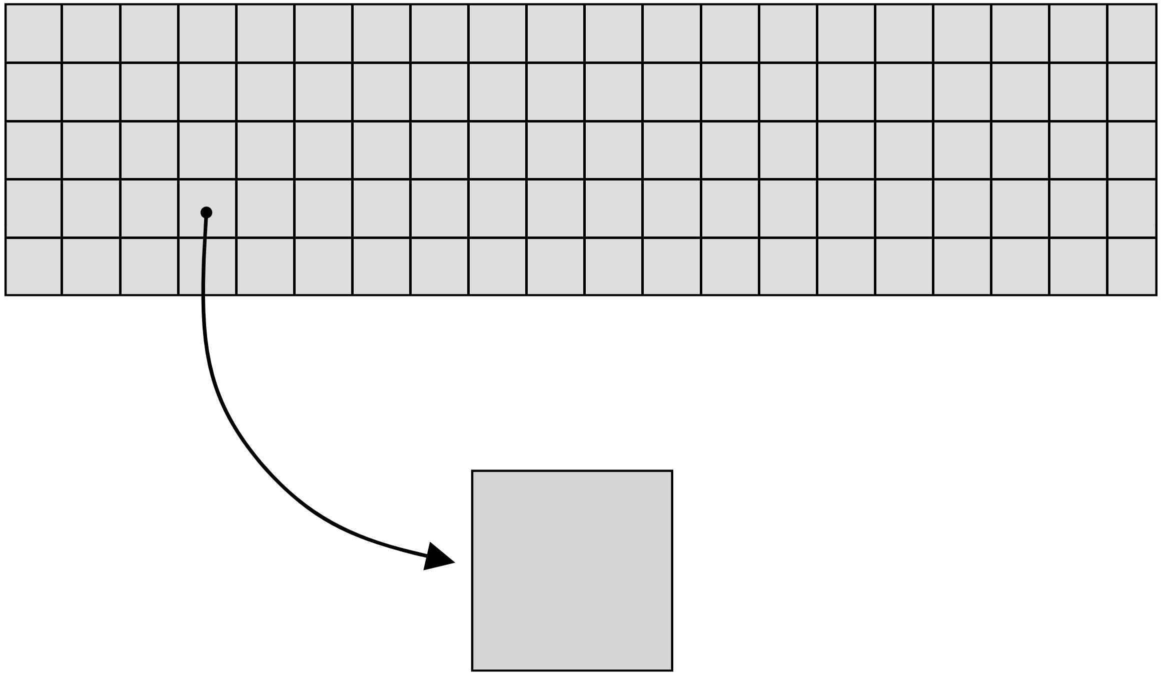
Deformação – 2D



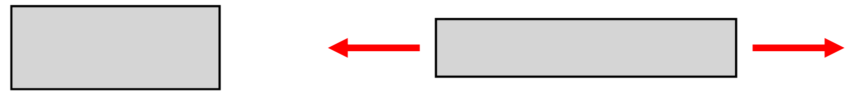


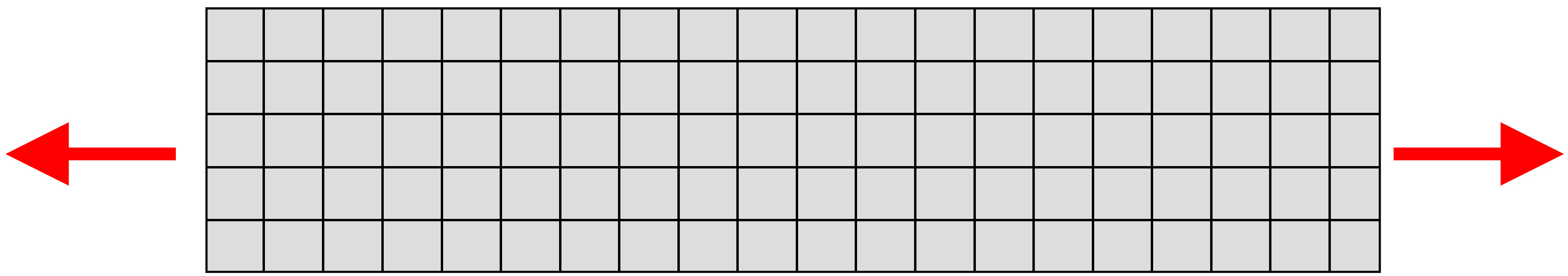
Deformação – 2D

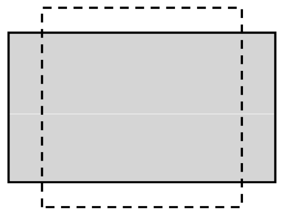




Deformação – 2D

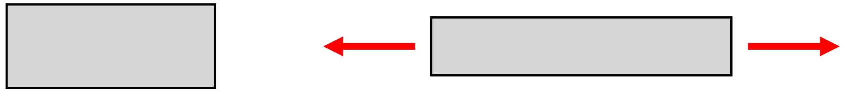


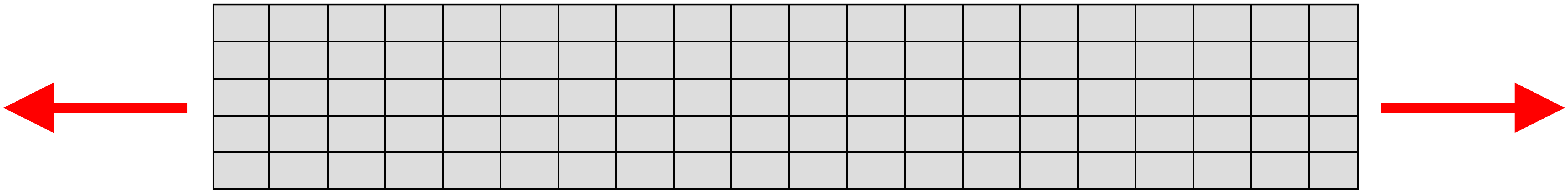


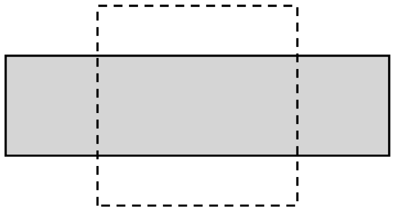


Não há distorção
do elemento

Deformação – 2D

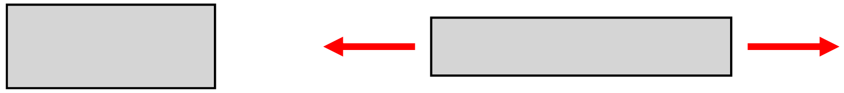




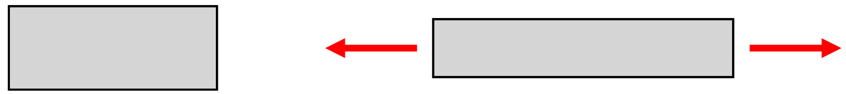


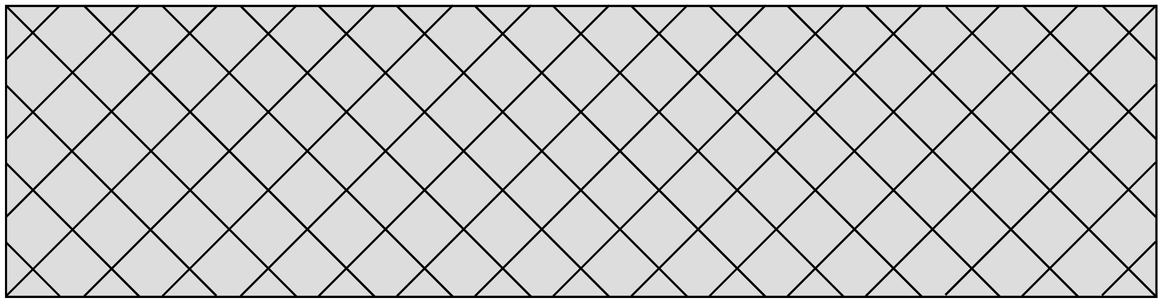
Não há distorção do elemento

Deformação – 2D

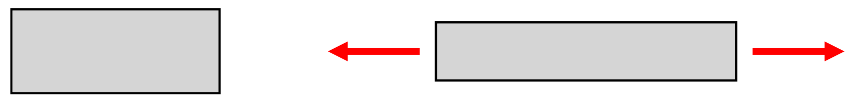


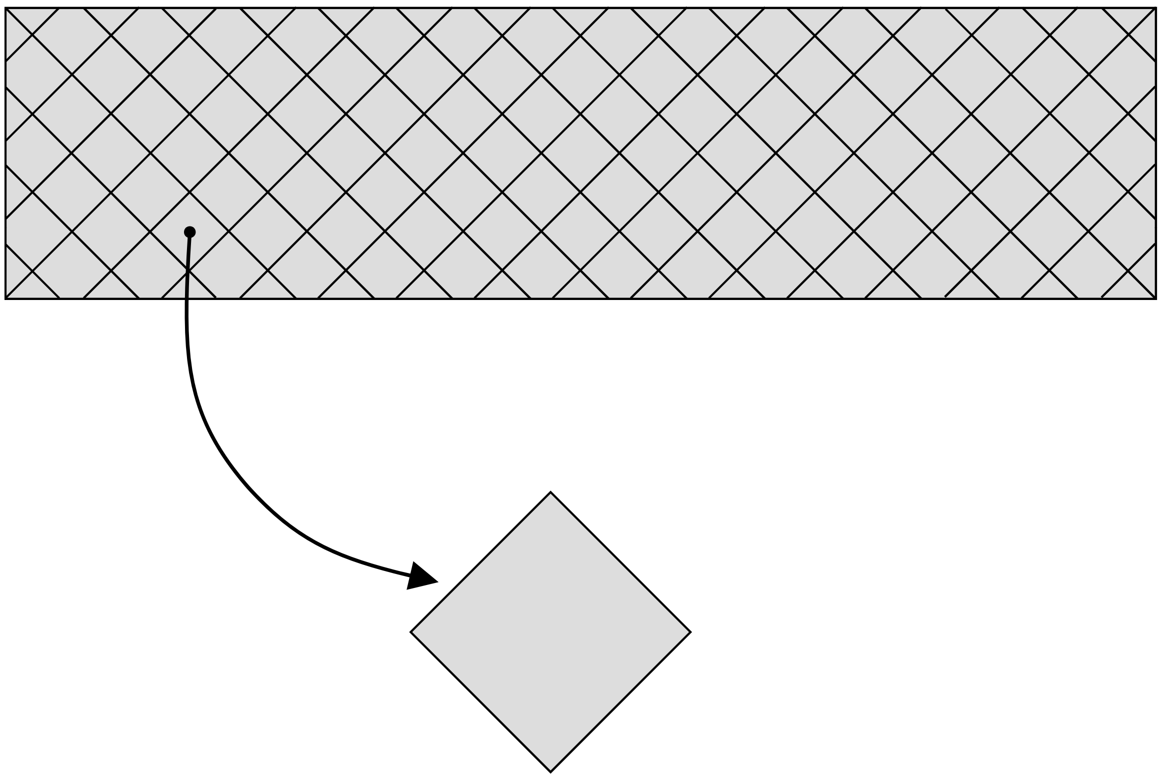
Deformação – 2D



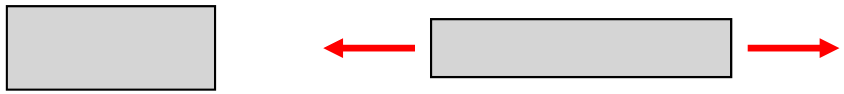


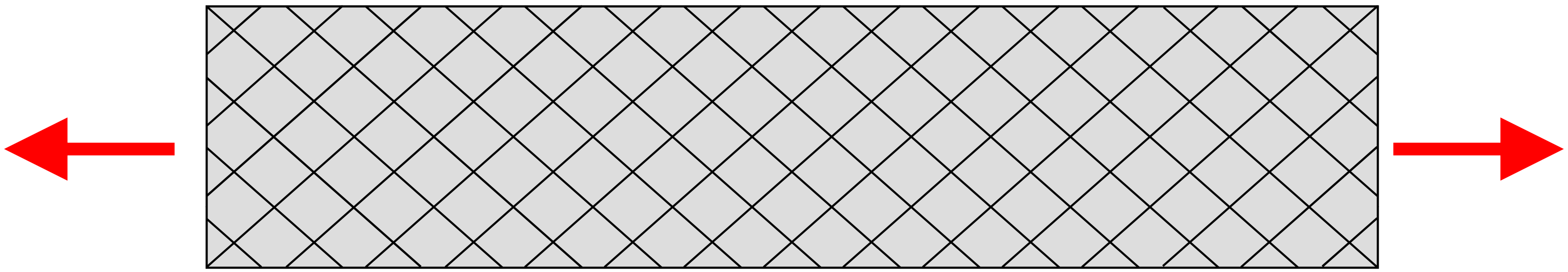
Deformação – 2D

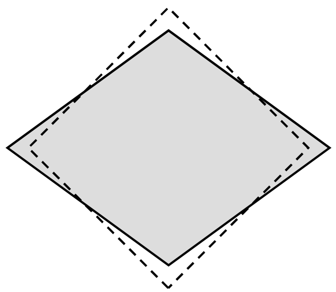




Deformação – 2D

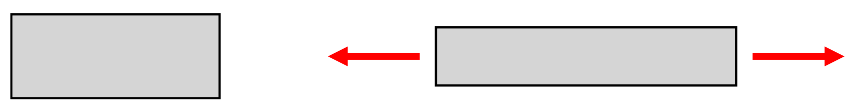


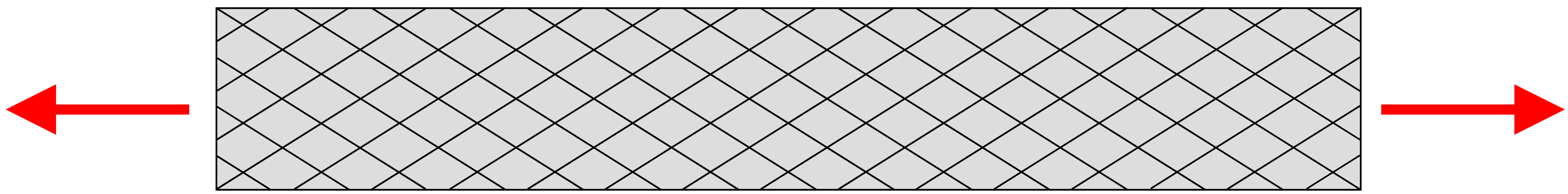


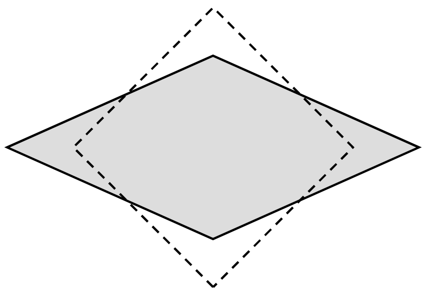


Há distorção no elemento (cisalhamento)

Deformação – 2D



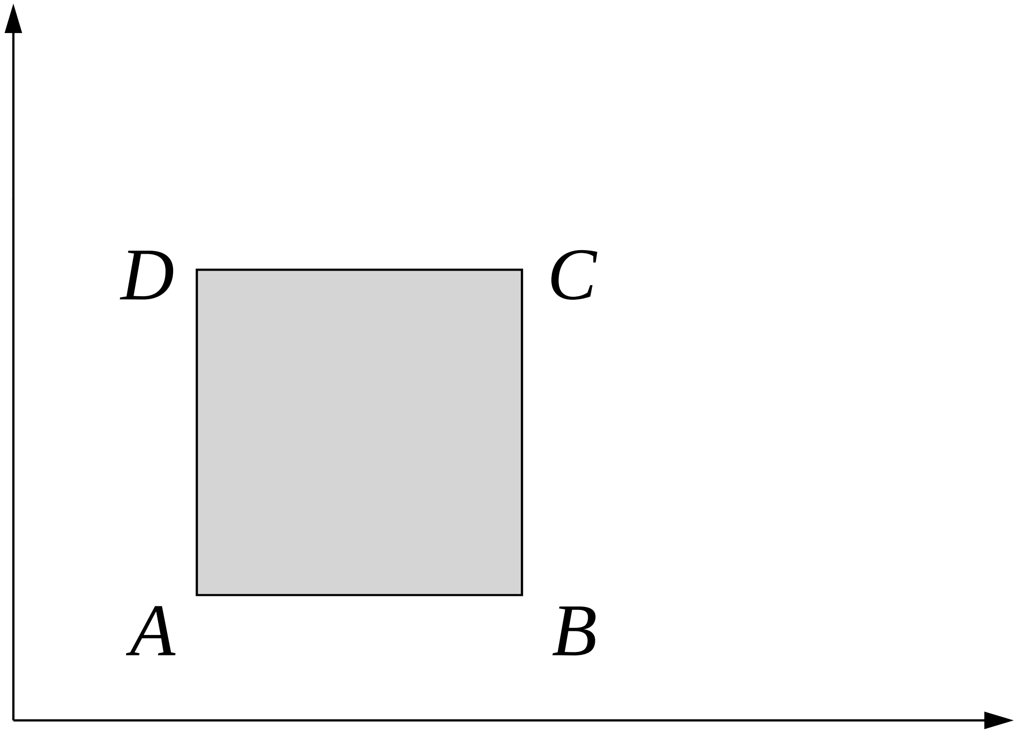




Há distorção no
elemento (cisalhamento)

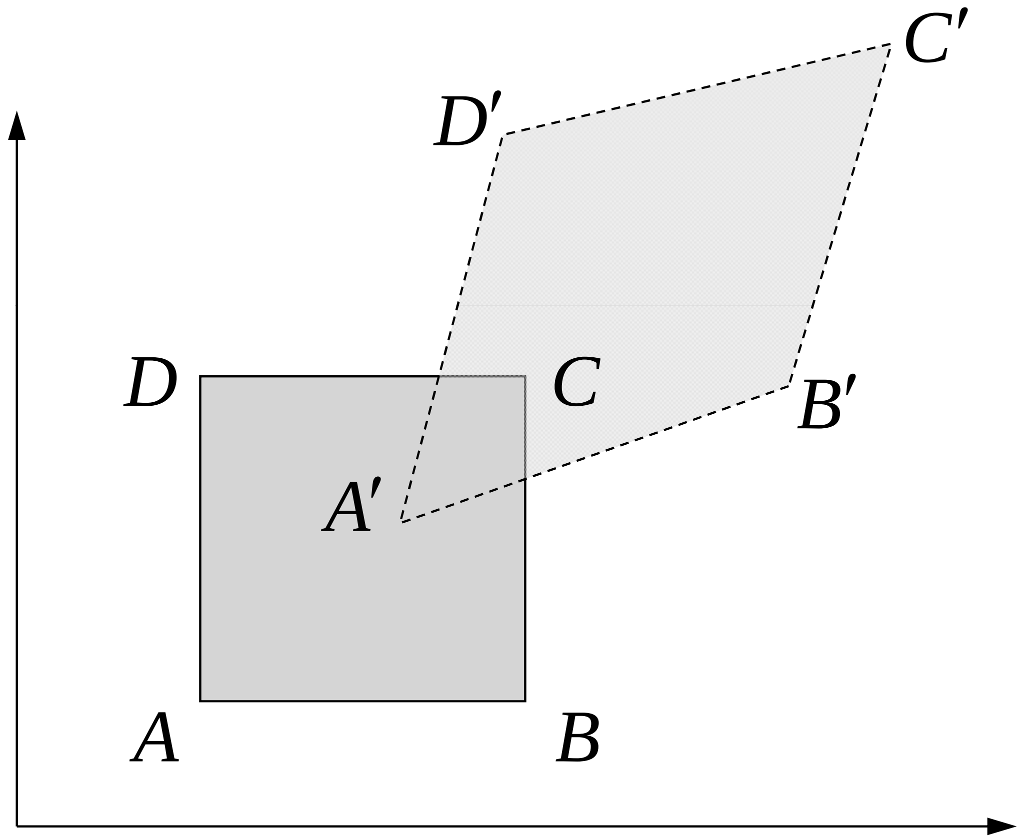
Deformação – 2D

Medida de Deformação – *Relações entre deslocamentos e deformações*



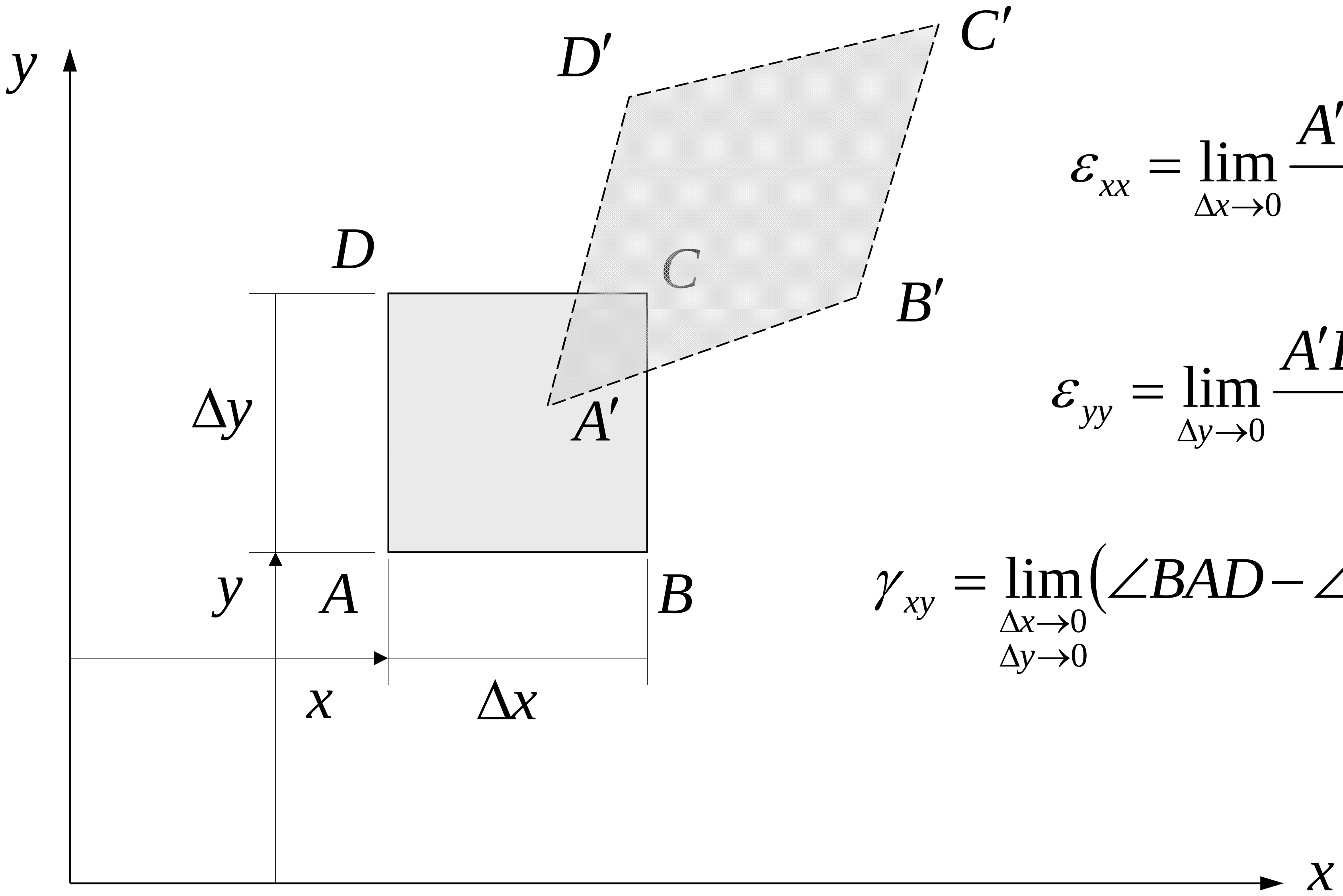
Deformação – 2D

Medida de Deformação – *Relações entre deslocamentos e deformações*



HIPÓTESE
Pequenas Deformações e Rotações!

Deformação – 2D

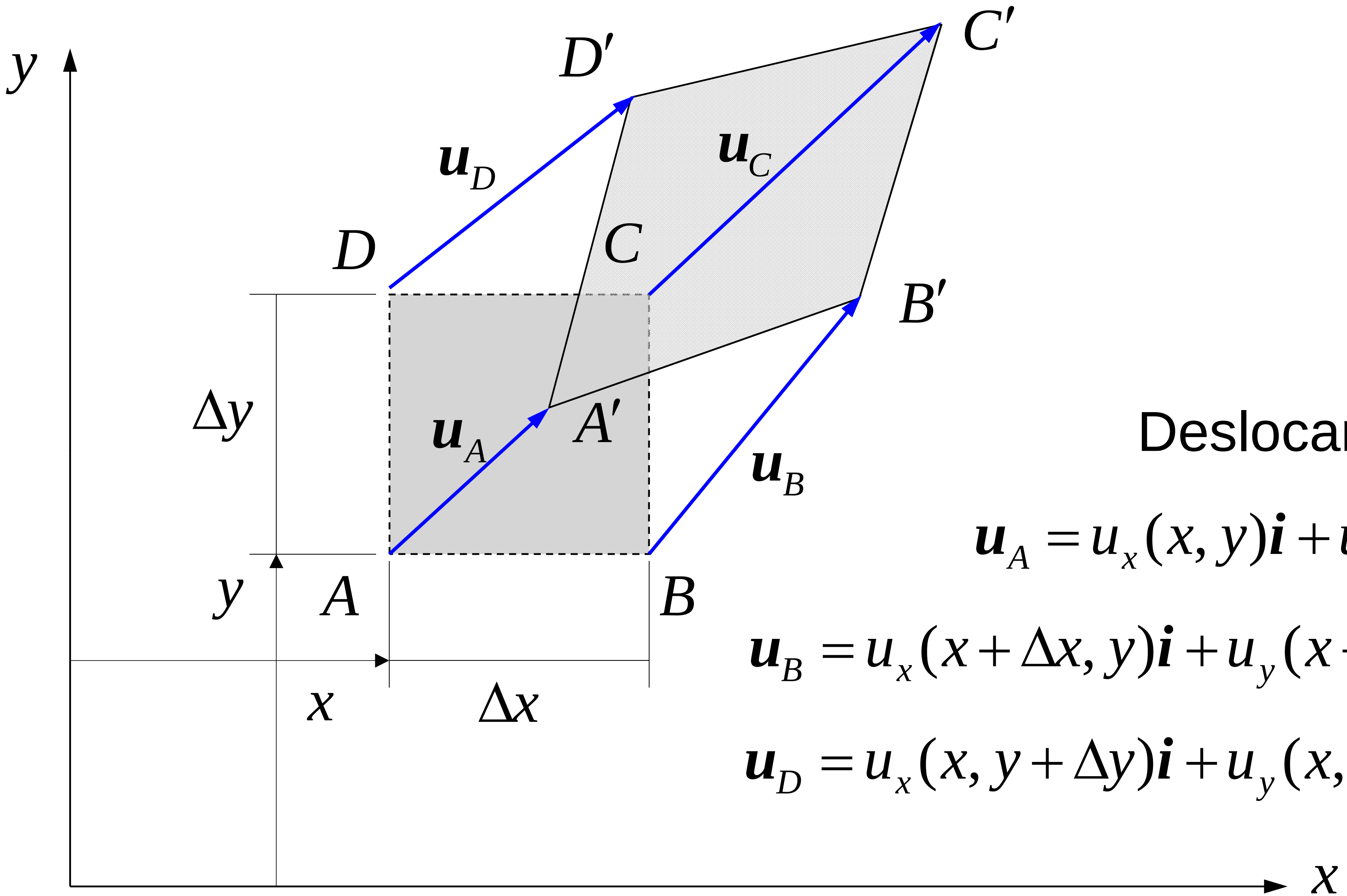


$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$\varepsilon_{yy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{A'D' - AD}{AD}$$

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\angle BAD - \angle B'A'D' \right)$$

Deformação – 2D



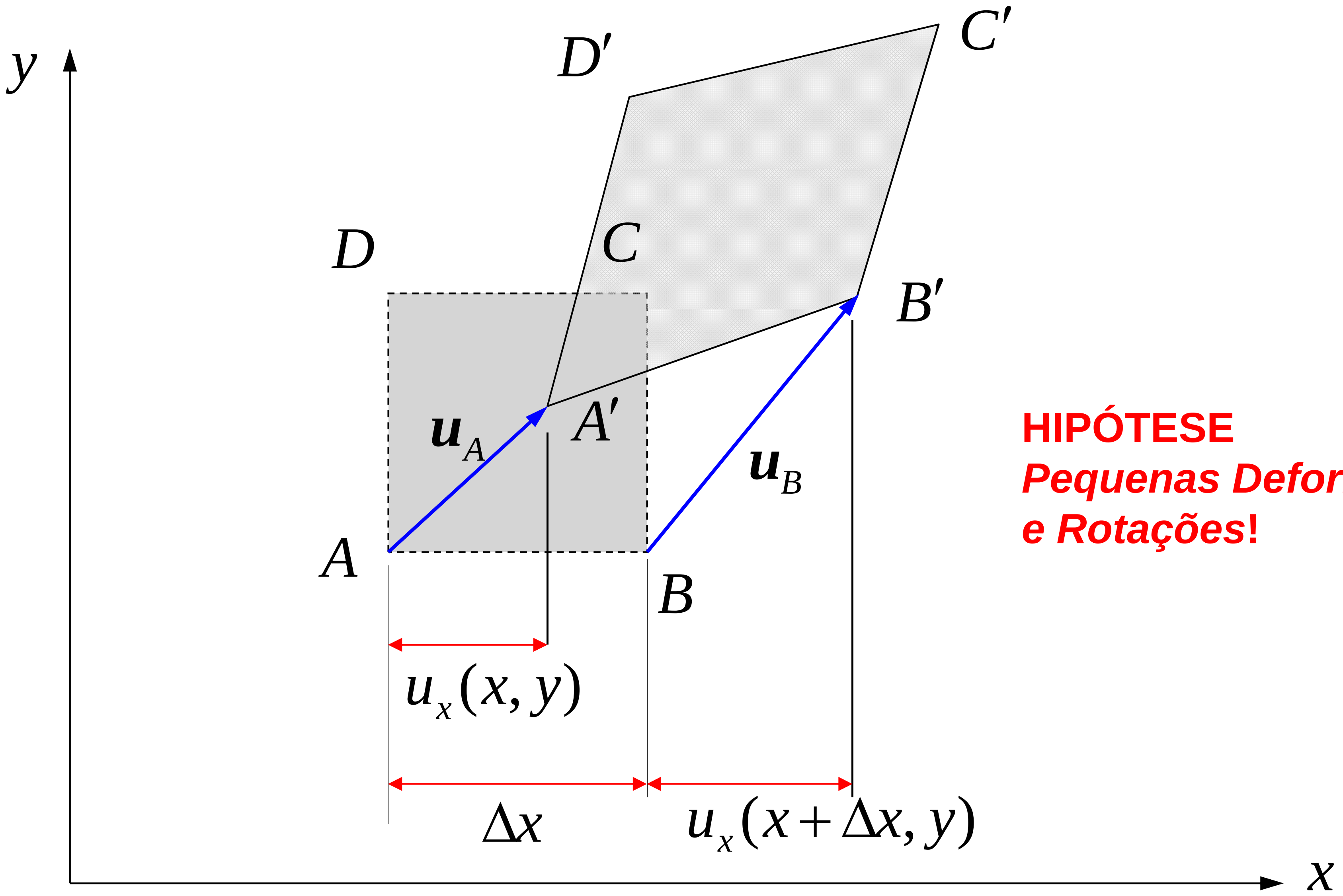
Deslocamentos

$$\boldsymbol{u}_A = u_x(x,y)\boldsymbol{i} + u_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{u}_B = u_x(x+\Delta x,y)\boldsymbol{i} + u_y(x+\Delta x,y)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{u}_D = u_x(x,y+\Delta y)\boldsymbol{i} + u_y(x,y+\Delta y)\boldsymbol{j}$$

Deformação – 2D



HIPÓTESE
Pequenas Deformações e Rotações!

Deformação – 2D

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$AB = \Delta x$$

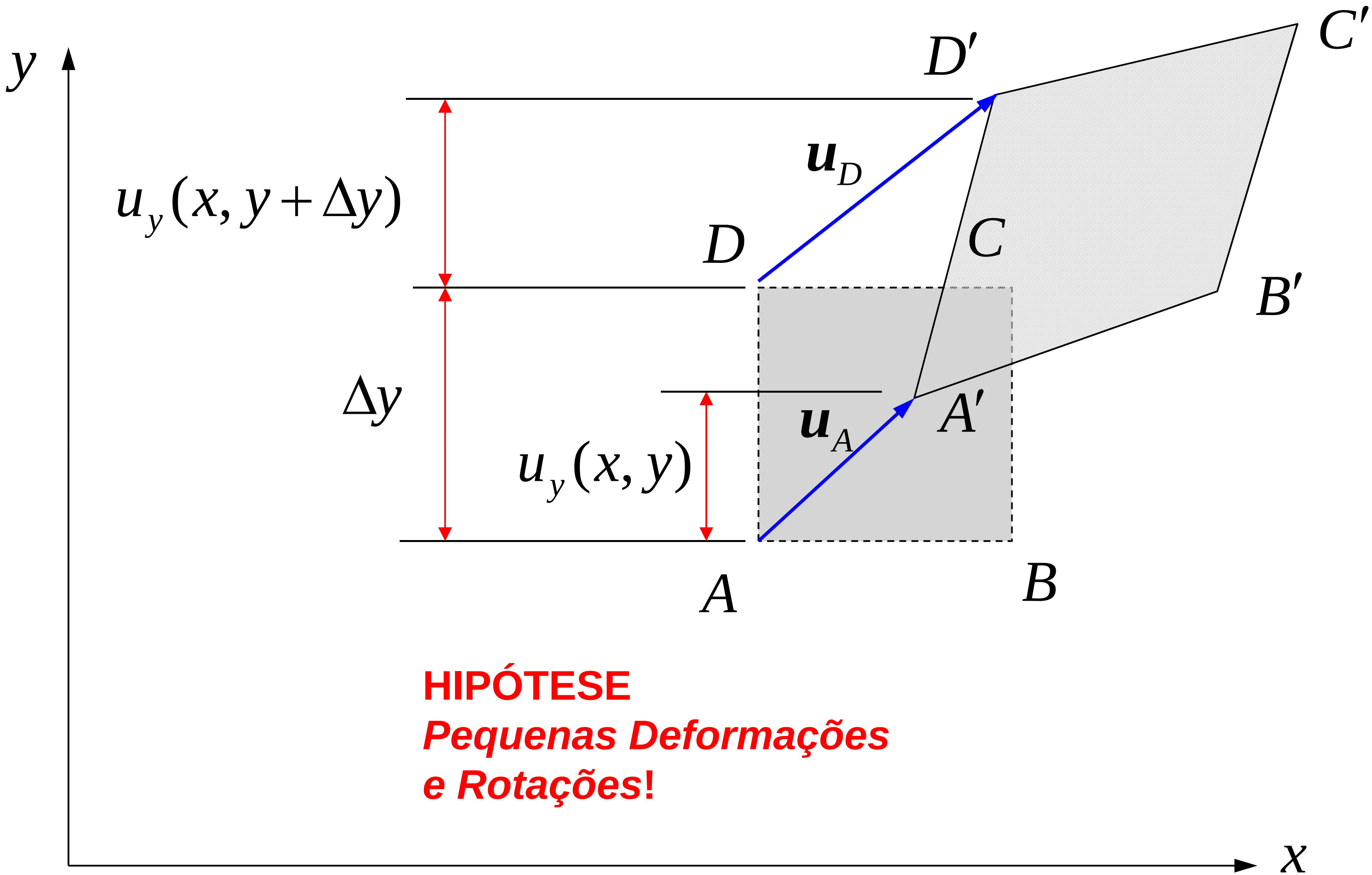
$$A'B' = \left[\Delta x + u_x(x + \Delta x, y)\right] - u_x(x, y)$$

$$u_x(x + \Delta x, y) \approx u_x(x, y) + (\partial u_x / \partial x)\Delta x$$

$$A'B' = \left[\Delta x + u_x(x, y) + (\partial u_x / \partial x)\Delta x\right] - u_x(x, y) = \left[\Delta x + (\partial u_x / \partial x)\Delta x\right]$$

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\Delta x + (\partial u_x / \partial x)\Delta x\right] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Deformação – 2D



HIPÓTESE
Pequenas Deformações e Rotações!

Deformação – 2D

$$\varepsilon_{yy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{A'D' - AD}{AD}$$

$$AD = \Delta y$$

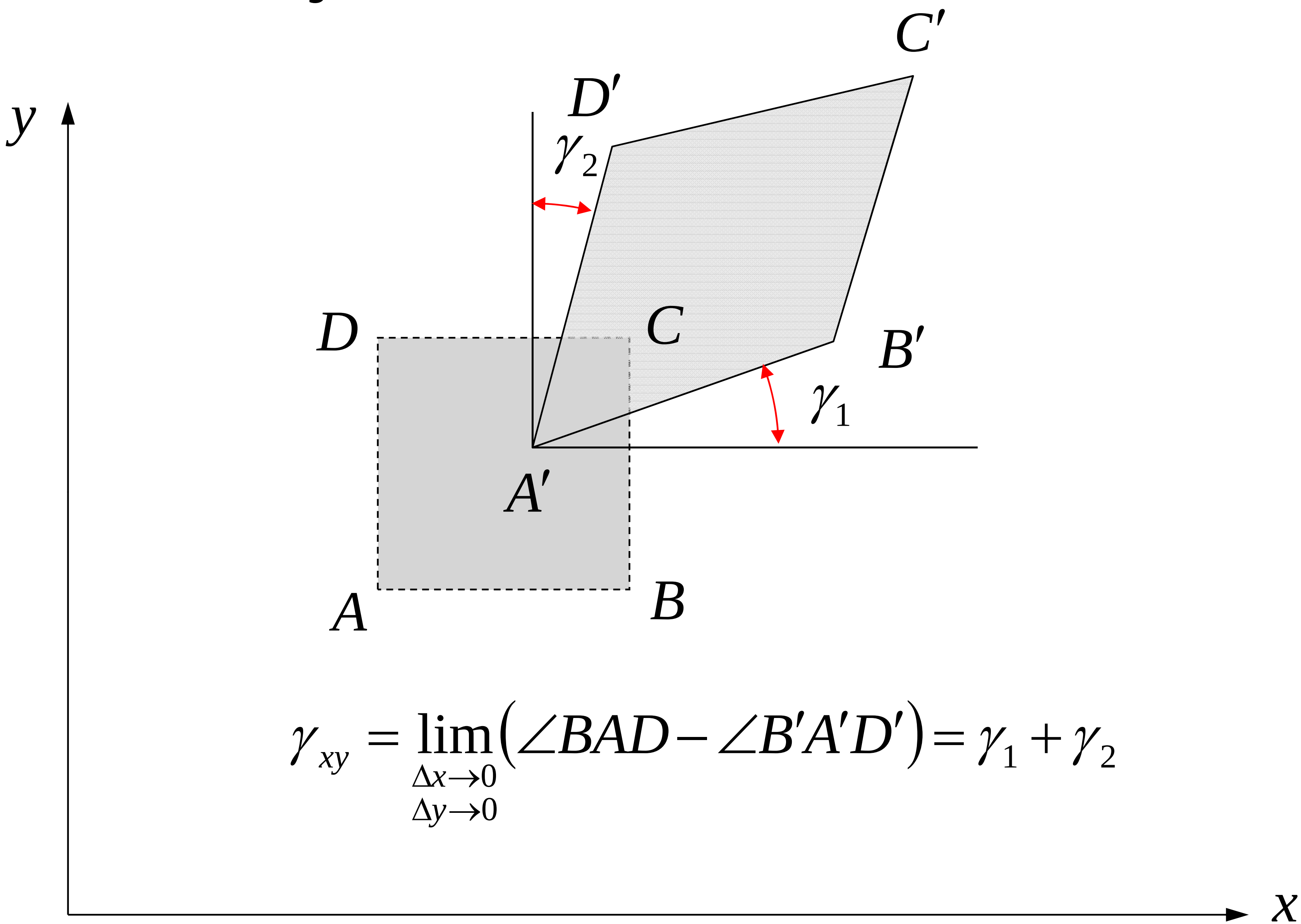
$$A'D' = \left[\Delta y + u_y(x, y + \Delta y)\right] - u_y(x, y)$$

$$u_y(x, y + \Delta y) \approx u_y(x, y) + (\partial u_y / \partial y)\Delta y$$

$$A'D' = \left[\Delta y + u_y(x, y) + (\partial u_y / \partial y)\Delta y\right] - u_y(x, y) = \left[\Delta y + (\partial u_y / \partial y)\Delta y\right]$$

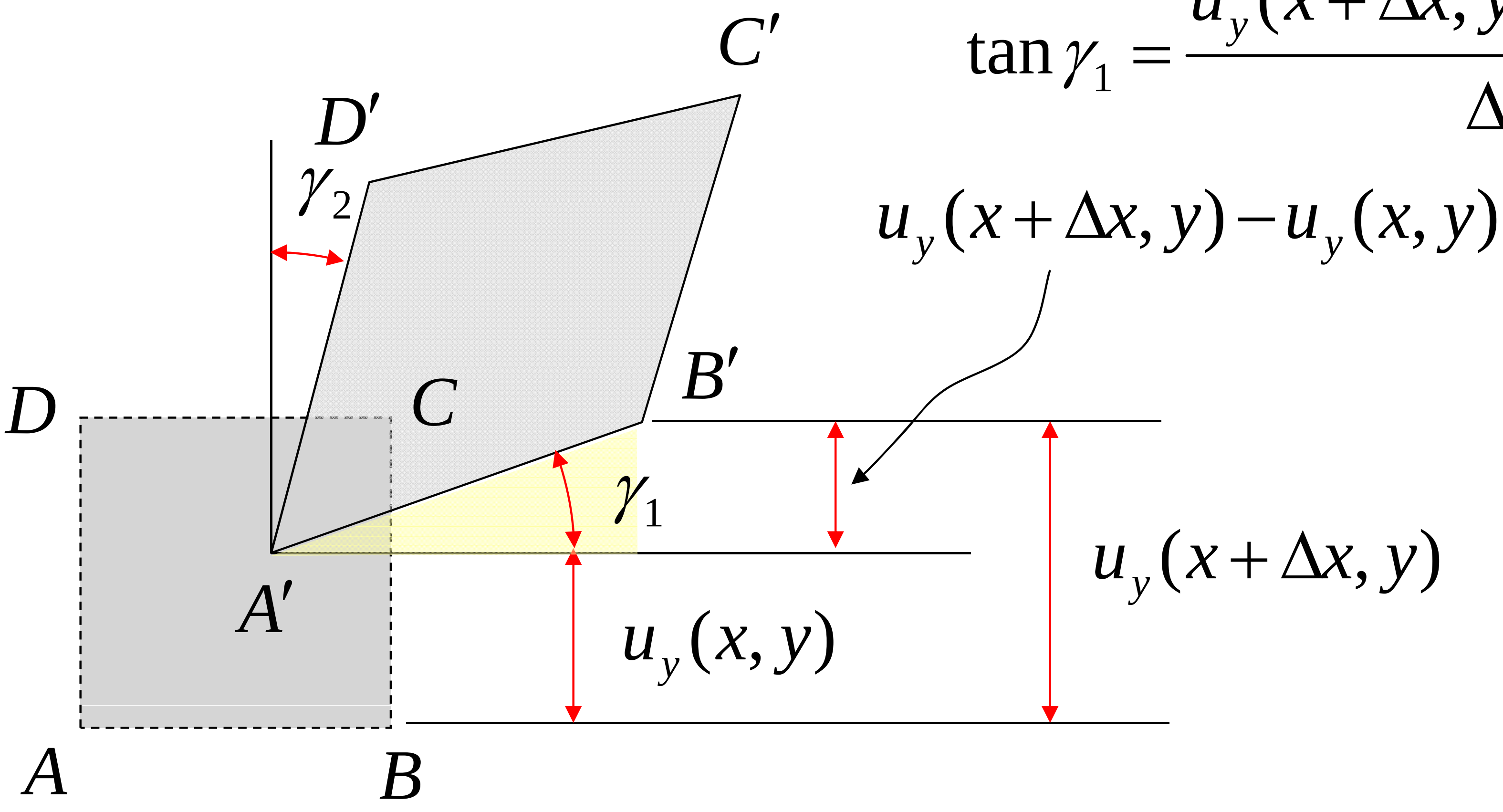
$$\varepsilon_{yy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[\Delta y + (\partial u_y / \partial y)\Delta y\right] - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Deformação – 2D



$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\angle BAD - \angle B'A'D' \right) = \gamma_1 + \gamma_2$$

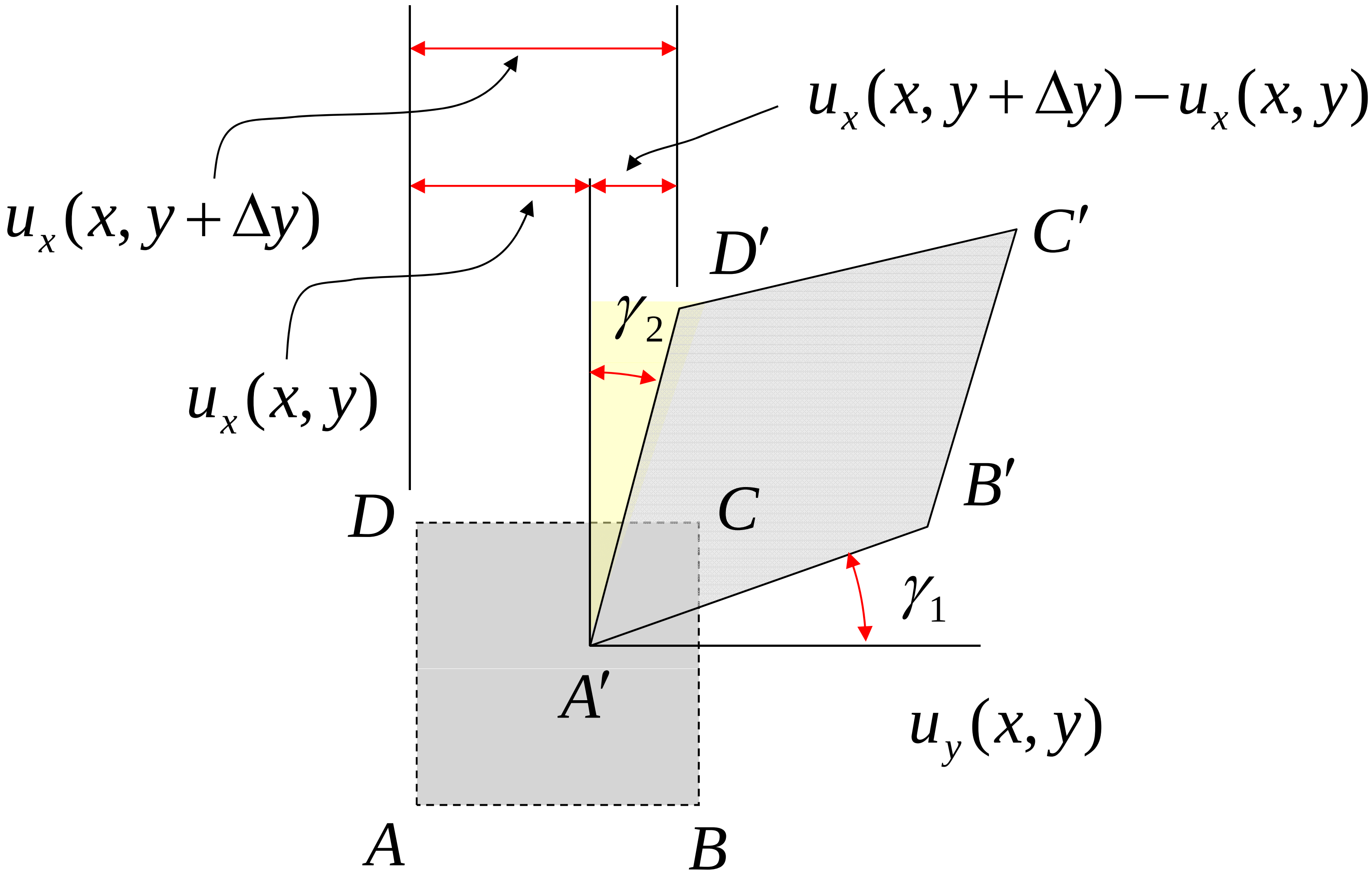
Deformação – 2D



$$\tan \gamma_1 = \frac{u_y(x+\Delta x, y) - u_y(x, y)}{\Delta x}$$

Deformação – 2D

$$\tan\gamma_2 = \frac{u_x(x, y+\Delta y) - u_x(x,y)}{\Delta y}$$



Deformação – 2D

$$\gamma_1 \approx \tan\gamma_1 = \frac{u_y(x+\Delta x, y) - u_y(x,y)}{\Delta x}$$

$$u_y(x+\Delta x, y) \approx u_y(x,y) + (\partial u_y / \partial x)\Delta x$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}}$$

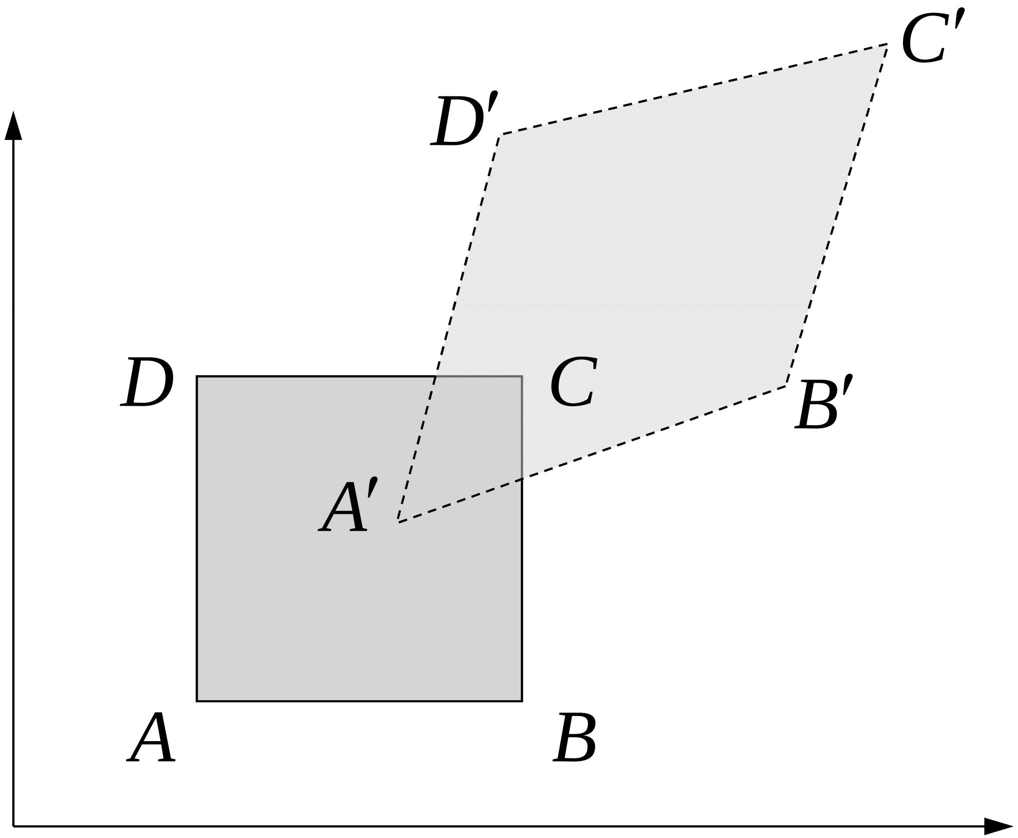
$$\gamma_2 \approx \tan\gamma_2 = \frac{u_x(x, y+\Delta y) - u_x(x,y)}{\Delta y}$$

$$u_x(x, y+\Delta y) \approx u_x(x,y) + (\partial u_x / \partial y)\Delta y$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Deformação – 2D

Medida de Deformação – *Relações entre deslocamentos e deformações*



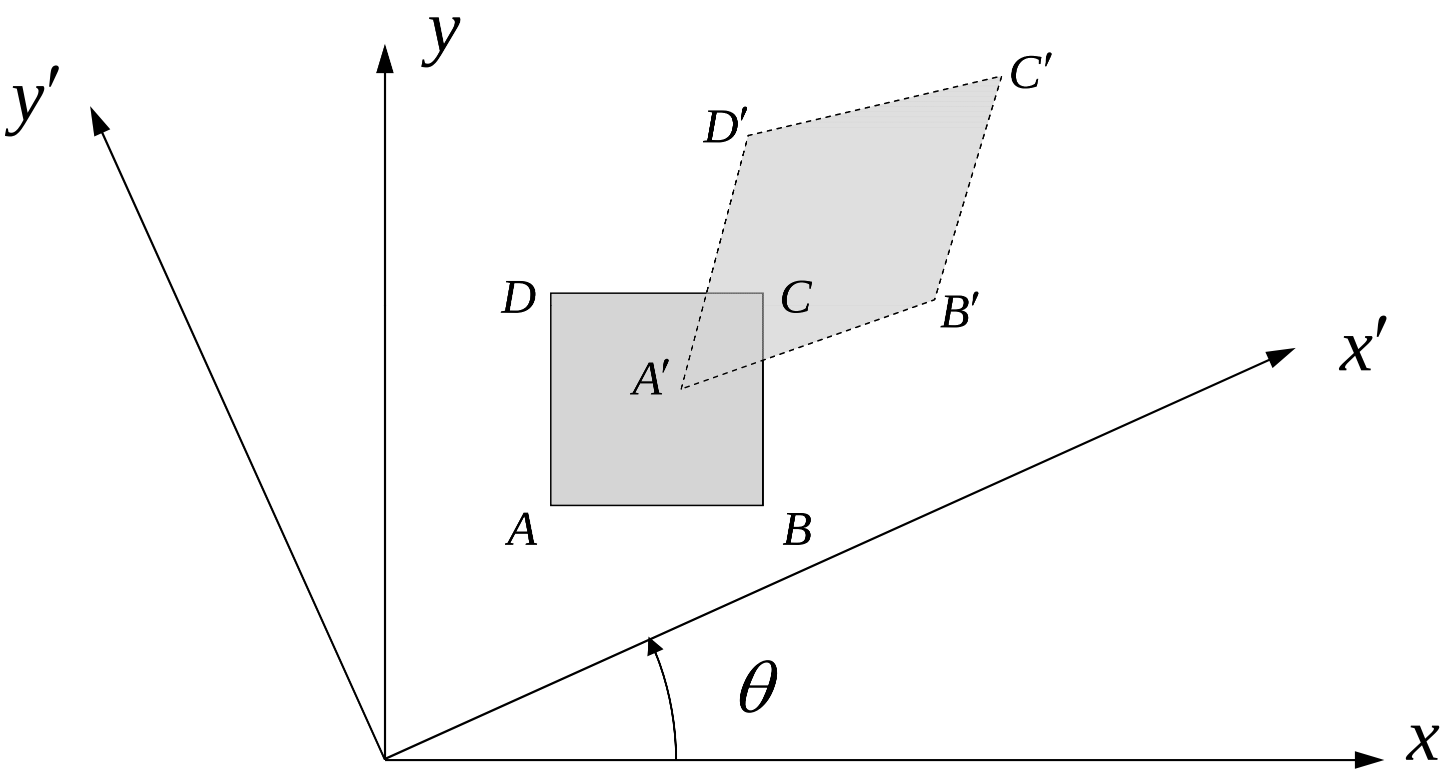
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

Deformação – 2D

Medida de Deformação – *Mudança do sistemas de coordenada*



$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\partial u'_x}{\partial x'}$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \frac{\partial u'_y}{\partial y'}$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'_x}{\partial y'} + \frac{\partial u'_y}{\partial x'}$$

Deformação – 2D

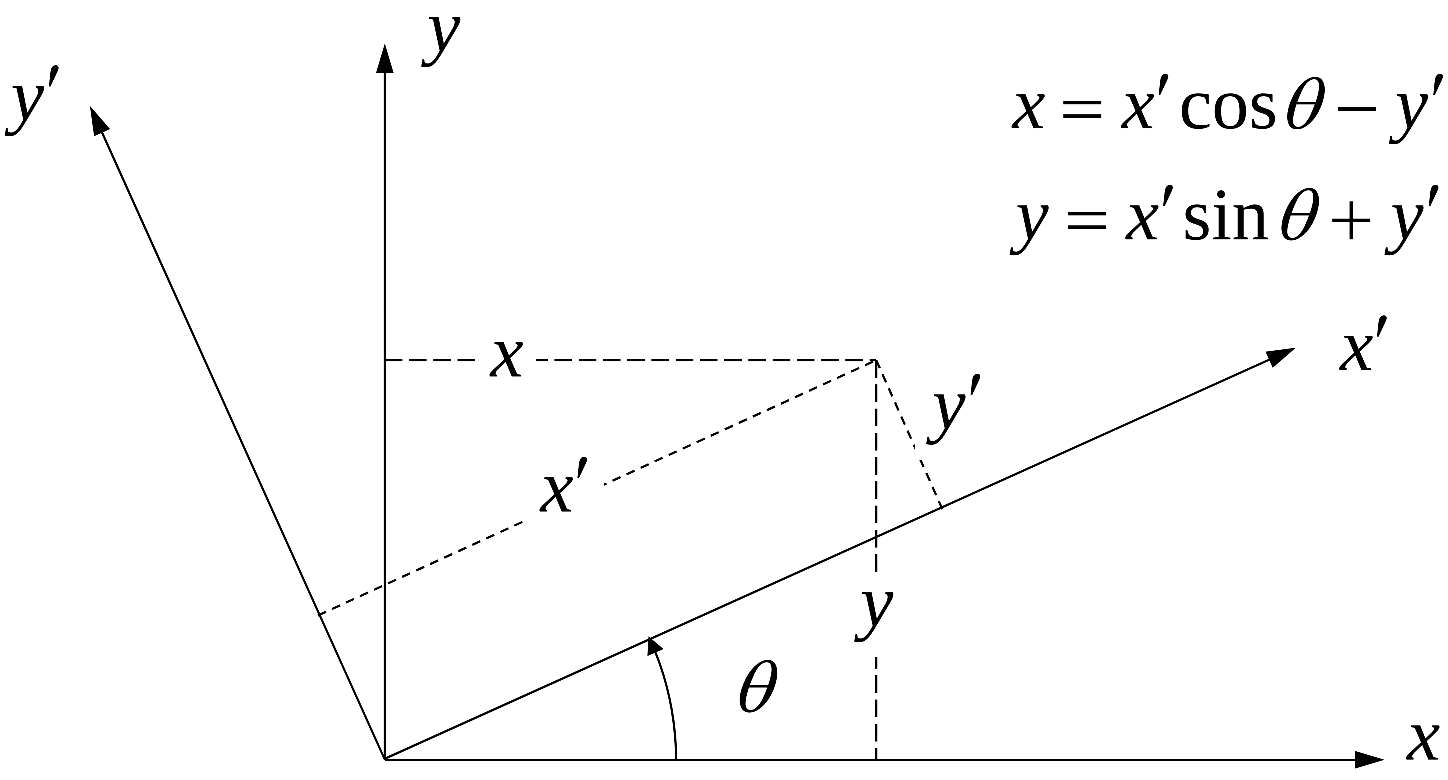
Medida de Deformação – *Mudança do sistemas de coordenada*

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\partial u'_x}{\partial x'} = \frac{\partial u'_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \frac{\partial u'_y}{\partial y'} = \frac{\partial u'_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u'_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial u'_x}{\partial y'} + \frac{\partial u'_y}{\partial x'} = \frac{\partial u'_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u'_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial u'_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}$$

Deformação – 2D



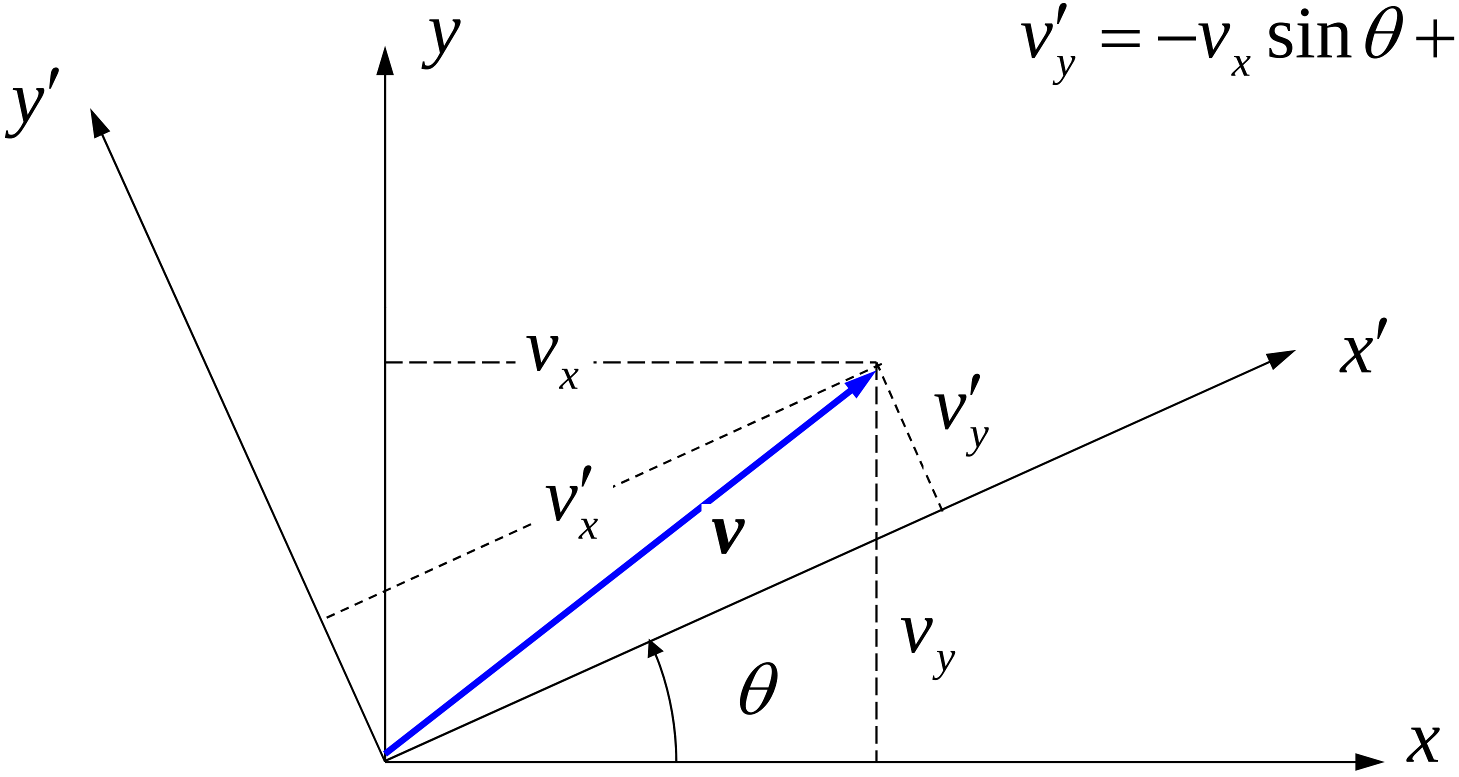
$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

Deformação – 2D

$$v'_x = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta$$

$$v'_y = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta$$



Deformação – 2D

$$\varepsilon_{x'x'} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u_y}{\partial x} \sin\theta \right) \cos\theta + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \cos\theta + \frac{\partial u_y}{\partial y} \sin\theta \right) \sin\theta$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial x} \cos^2\theta + \frac{\partial u_y}{\partial y} \sin^2\theta + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \sin\theta \cos\theta$$

$$\varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_{xx} \cos^2\theta + \varepsilon_{yy} \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

Deformação – 2D

Medida de Deformação – *Mudança do sistemas de coordenada*

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\cos 2\theta - \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'y'} = \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\sin 2\theta + \varepsilon_{xy}\cos 2\theta$$

Deformação – 3D

Tensor de Deformação

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x})$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})$$

Relação Tensão *vs.* Deformação

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Relação Tensão *vs.* Deformação

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})\right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\right]$$

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}$$

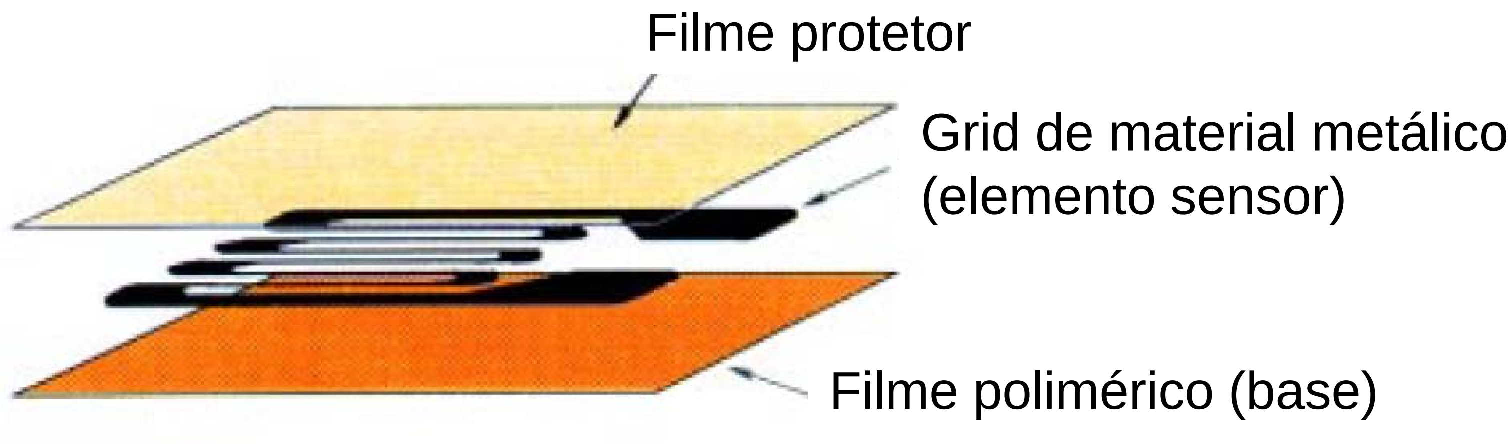
Medida Experimental de Deformações

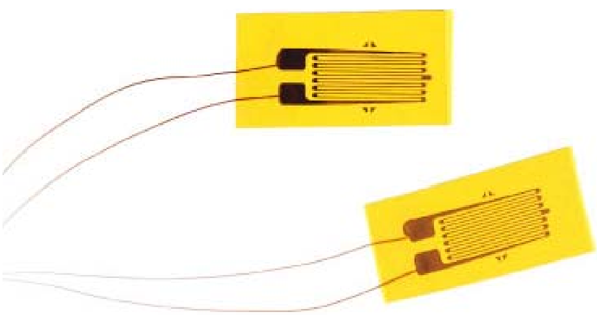
Técnicas para medida de deformação

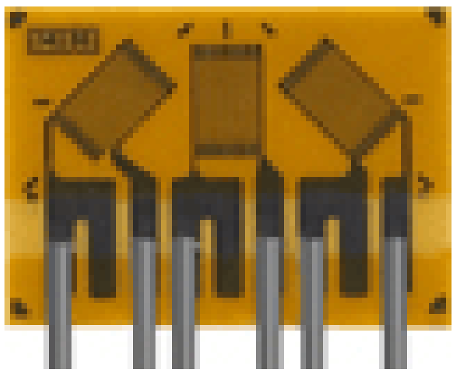
- Mecânicas
- Elétricas
- Ópticas
- Acústicas

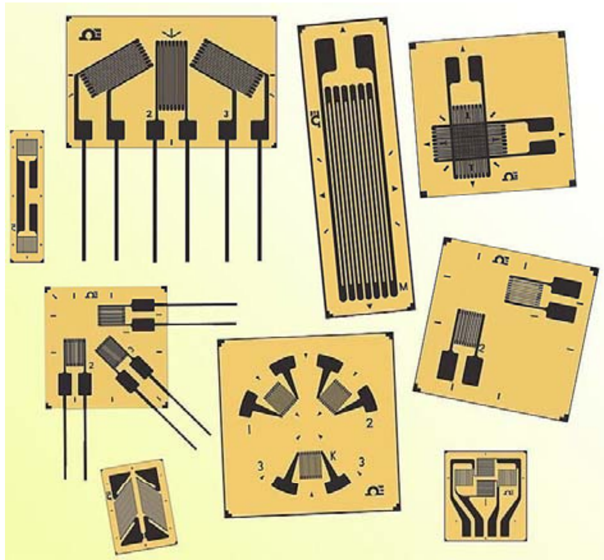
Medida Experimental de Deformações

Extensômetros Elétricos Resistivos

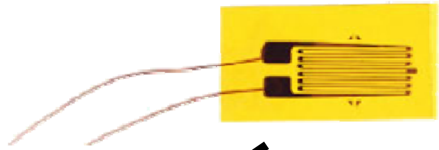


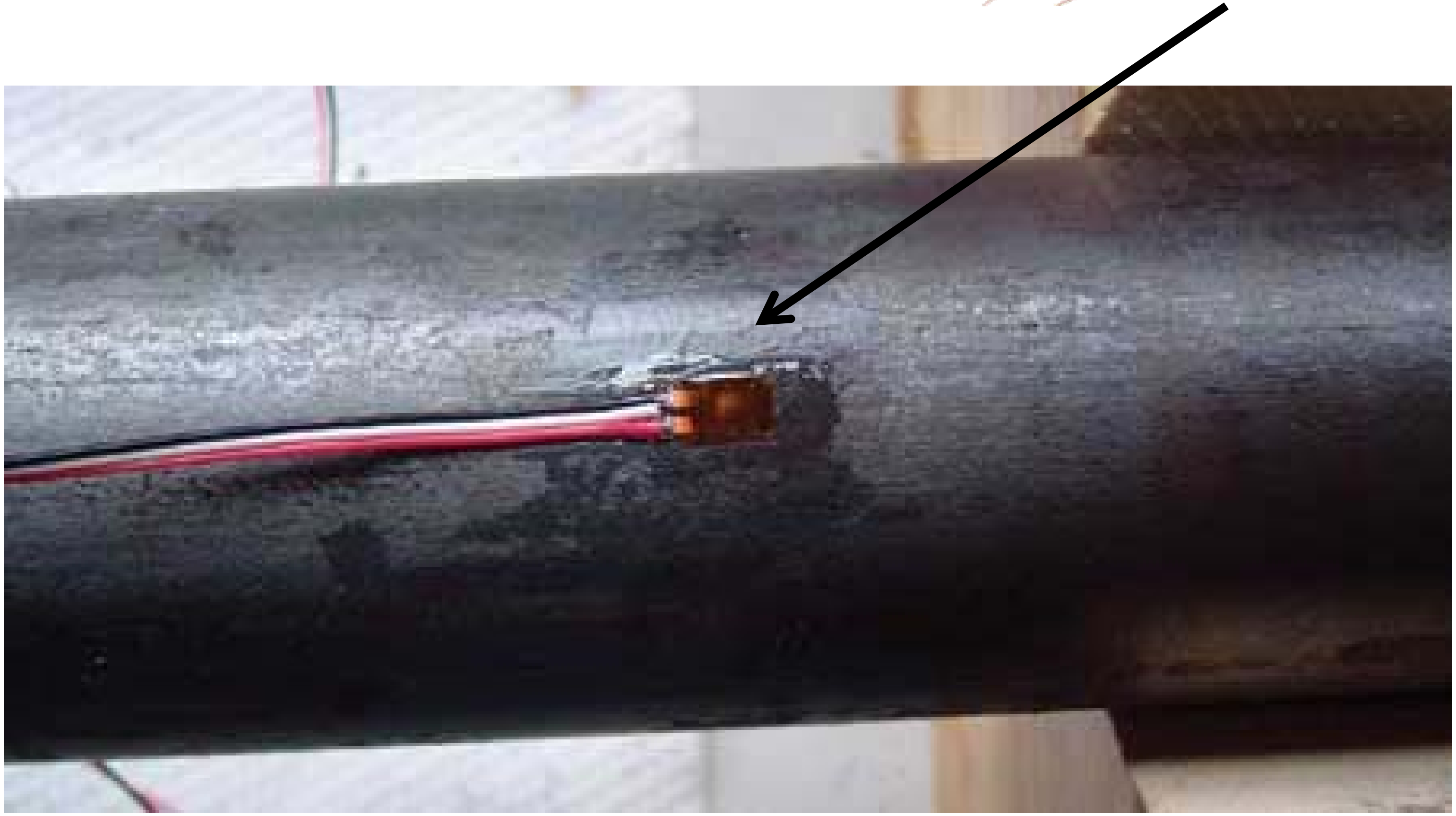






Medida Experimental de Deformações

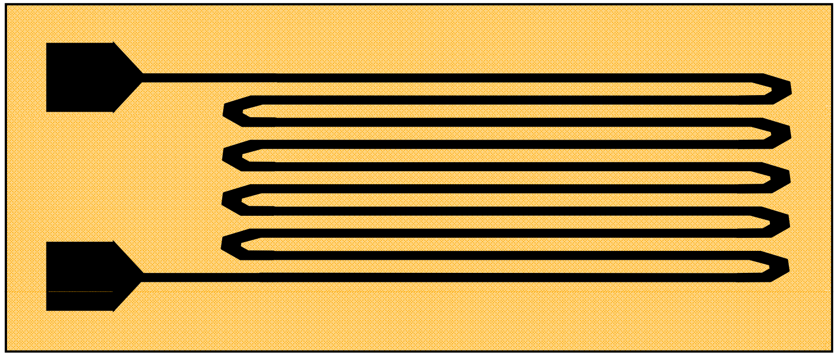




Medida Experimental de Deformações

Extensômetros Elétricos Resistivos

Extensômetros uniaxiais



$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R – Resistência elétrica
ρ – Resistividade
L – Comprimento do fio metálico
A – Área da seção transversal do fio metálico

Medida Experimental de Deformações

Extensômetros Elétricos Resistivos

Extensômetros uniaxiais

$$R = R(L, A, \rho) = \rho \frac{L}{A}$$

$$dR = \frac{\partial R}{\partial L} dL + \frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial \rho} d\rho$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} = \varepsilon + 2\nu\varepsilon + \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{dR}{R} = S_g \varepsilon$$

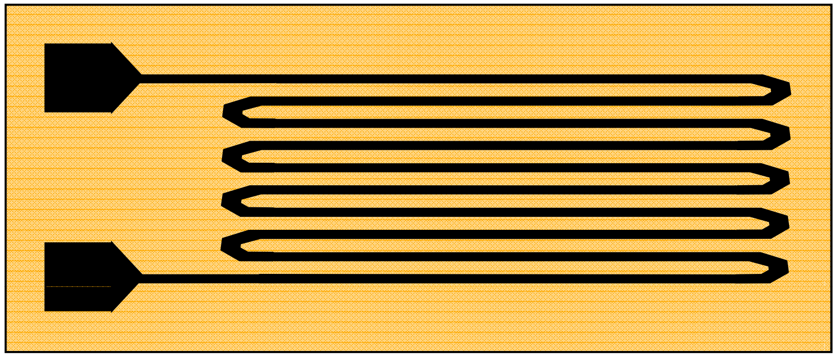
$$S_g = 1 + 2\nu + \frac{d\rho / \rho}{\varepsilon}$$

Efeito piezo-resistivo

Medida Experimental de Deformações

Extensômetros Elétricos Resistivos

Extensômetros uniaxiais



$$\frac{\Delta R}{R} = S_g \varepsilon$$

Medida Experimental de Deformações

Extensômetros Elétricos Resistivos

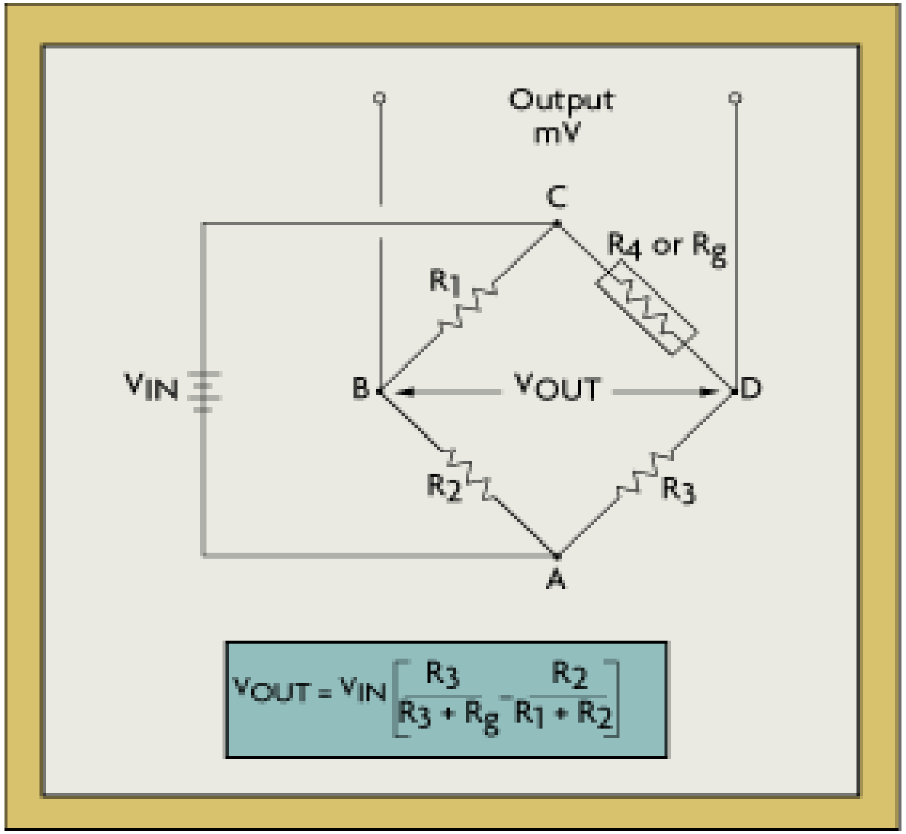
Material	Gage Factor (S_G)
Platina (Pt 100%)	6.1
Platina-Irídio (Pt 95%, Ir 5%)	5.1
Platina-Tungstênio (Pt 92%, W 8%)	4.0
Isoelastic™ (Fe 55.5%, Ni 36% Cr 8%, Mn 0.5%) *	3.6
Constantan™/Advance™/Copel ™ (Ni 45%, Cu 55%) *	2.1
Nichrome V™ (Ni 80%, Cr 20%) *	2.1
Karma™ (Ni 74%, Cr 20%, Al 3%, Fe 3%) *	2.0
Armour D™ (Fe 70%, Cr 20%, Al 10%) *	2.0
Monel™ (Ni 67%, Cu 33%) *	1.9
Manganin™ (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%) *	0.47
Níquel (Ni 100%)	-12.1

Fonte: http://www.efunda.com/designstandards/sensors/strain_gages/strain_gage_sensitivity.cfm

Medida Experimental de Deformações

Extensômetros Elétricos Resistivos

Ponte de Wheatstone (1/4 de Ponte)



$$\frac{\Delta R}{R} = S_g \varepsilon$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$R_g = R + \Delta R$$

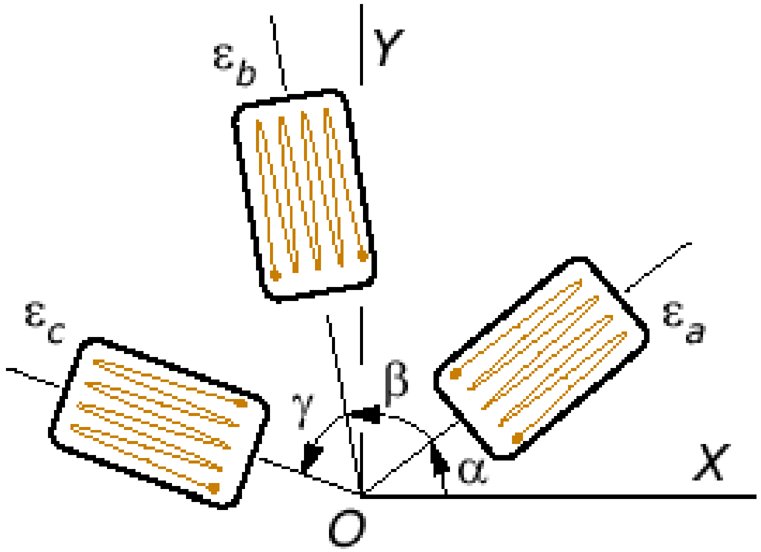
$$\Delta V = V_{\text{IN}} \left[\frac{1}{2 + \Delta R / R} - \frac{1}{2} \right] \cong -\frac{V_{\text{IN}}}{4} \frac{\Delta R}{R}$$

$$\varepsilon \cong -\frac{4 \Delta V}{S_g V_{\text{IN}}}$$

Medida Experimental de Deformações

Extensômetros Elétricos Resistivos

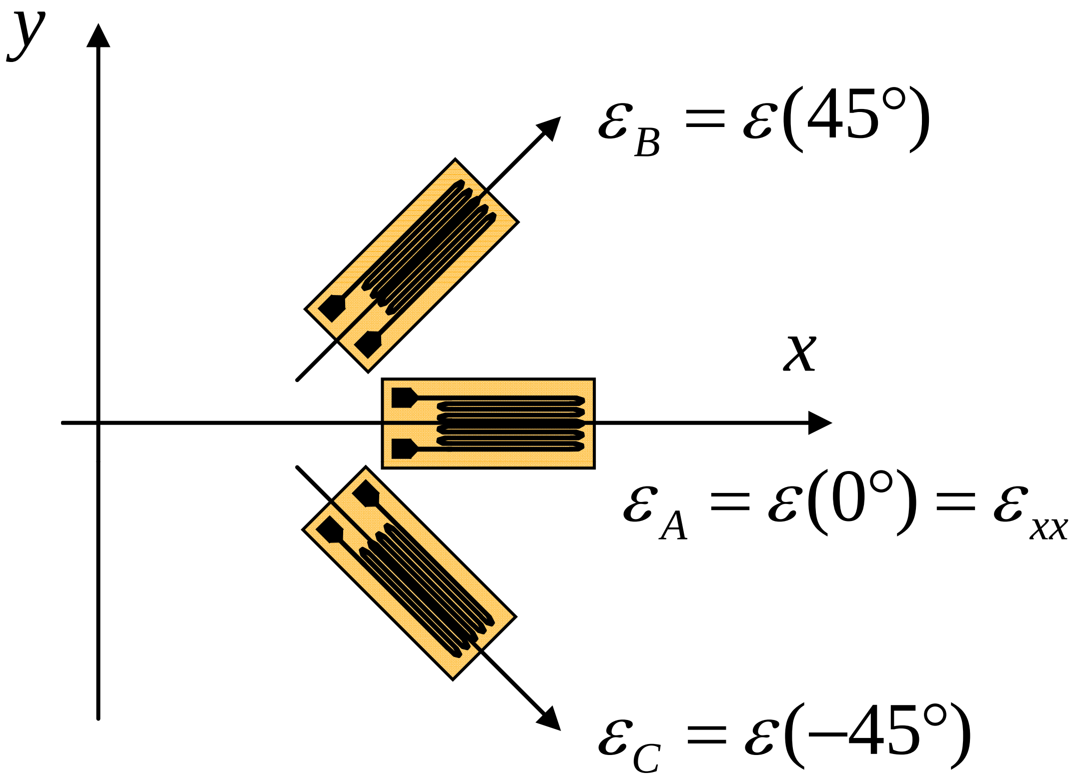
Extensômetros triaxiais (rosetas extensométricas)



$$\varepsilon(\theta) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

Medida Experimental de Deformações

Roseta a 45°



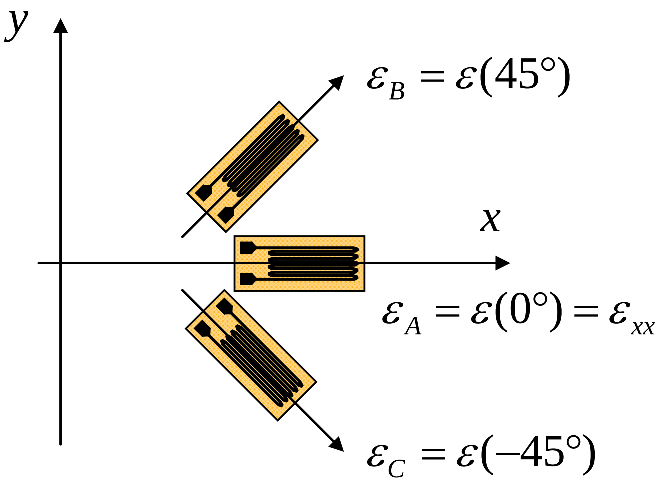
$$\varepsilon(\theta) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

Medida Experimental de Deformações

Roseta a 45°

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_{yy}}{2}\cos(90°) + \varepsilon_{xy}\sin(90°) = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_{yy}}{2}\cos(-90°) + \varepsilon_{xy}\sin(-90°) = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_{yy}}{2} - \varepsilon_{xy}$$



$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_A$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_B + \varepsilon_C - \varepsilon_A$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_C}{2}$$

Deformação – 3D

Tensor de Deformação

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x})$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})$$

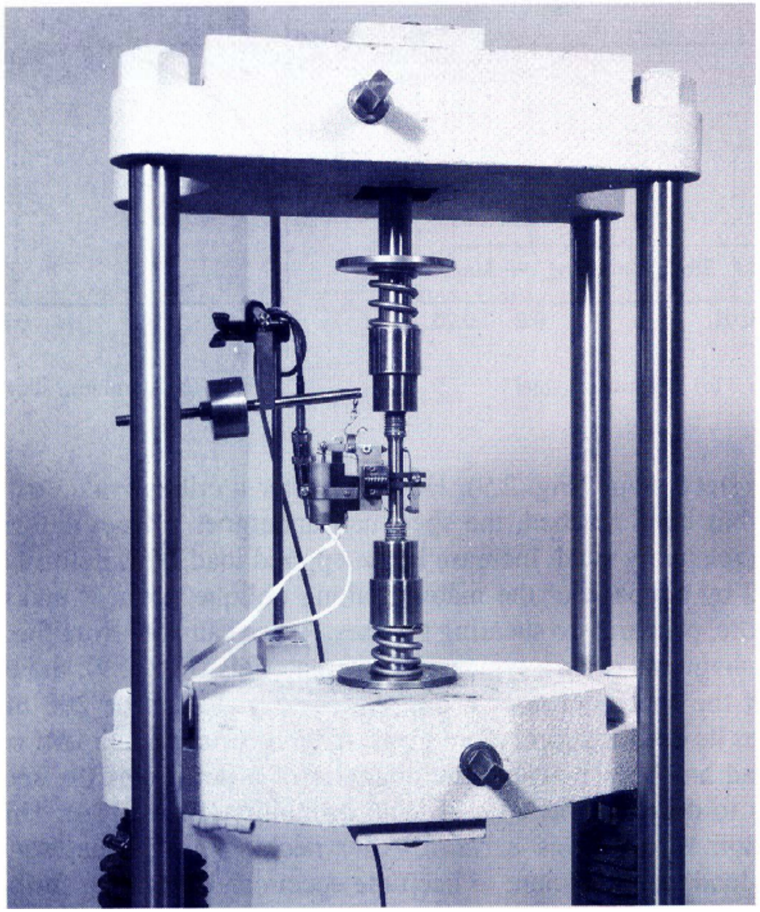
Relação Tensão *vs*. Deformação

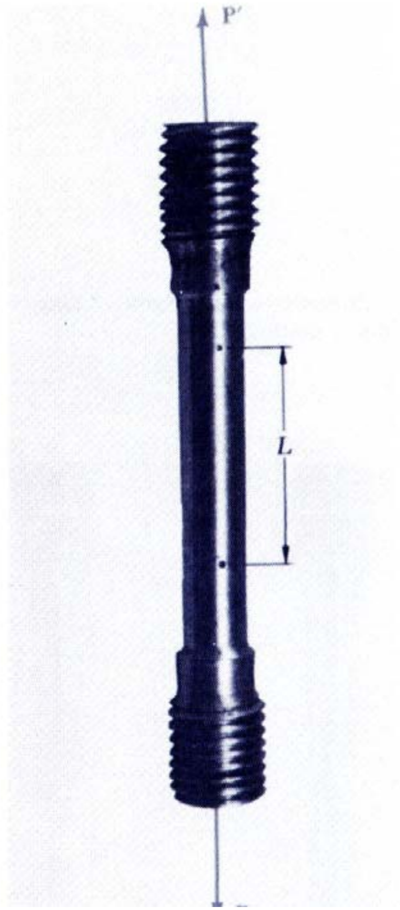
Lei de Hooke Generalizada

- Material Isotrópico
- Material Elástico
- Material Linear
- Pequenas Deformações

Relação Tensão *vs*. Deformação

Ensaio de Tração

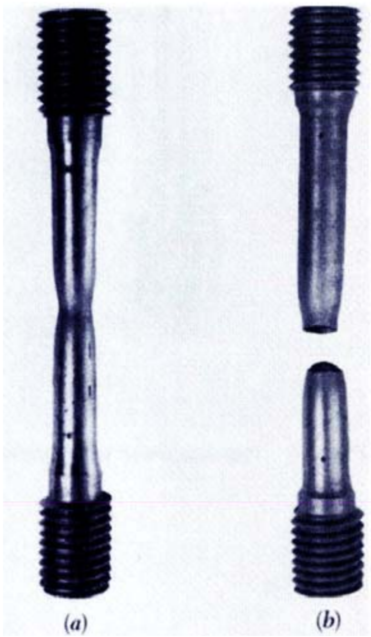


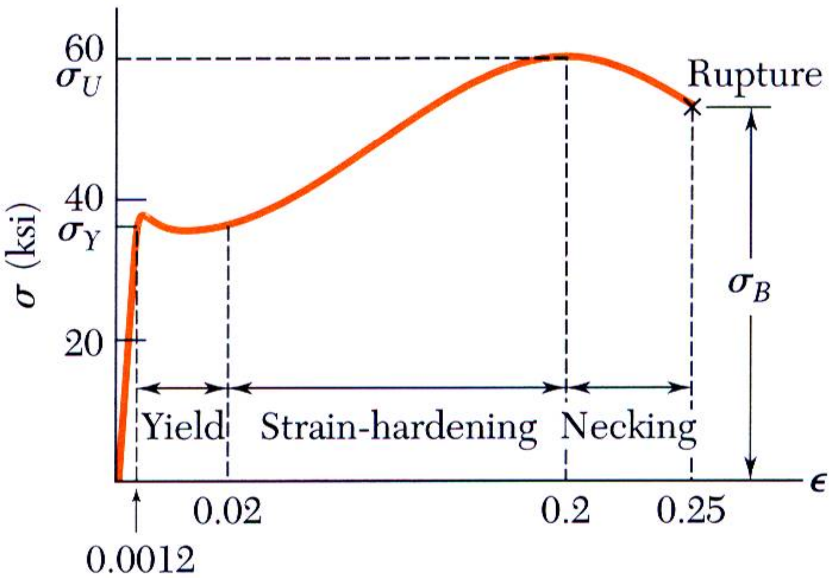


Figuras reproduzidas de:
Beer, Johnston & DeWolf, *Mechanics of Materials*, *4th ed.*, McGraw-Hill, 2002

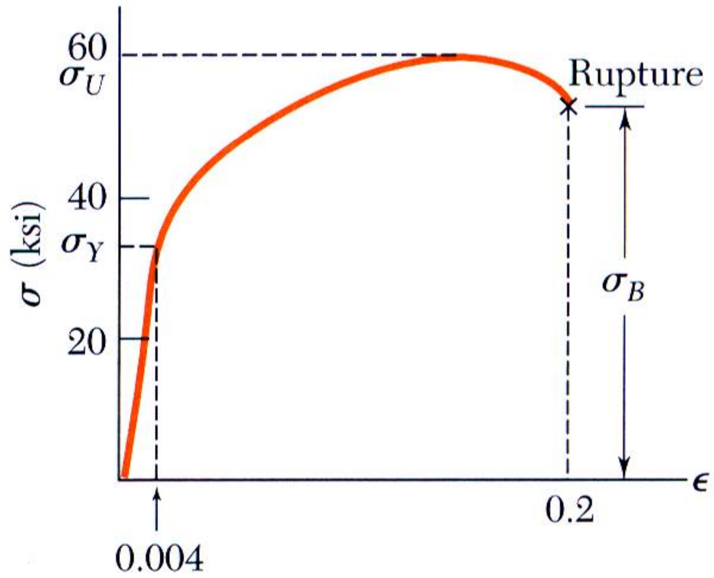
Relação Tensão *vs.* Deformação

Ensaio de Tração





(a) Low-carbon steel

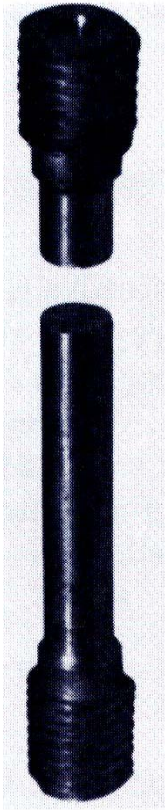


(b) Aluminum alloy

Figuras reproduzidas de:
Beer, Johnston & DeWolf, *Mechanics of Materials*, *4th ed.*, McGraw-Hill, 2002

Relação Tensão *vs.* Deformação

Ensaio de Tração



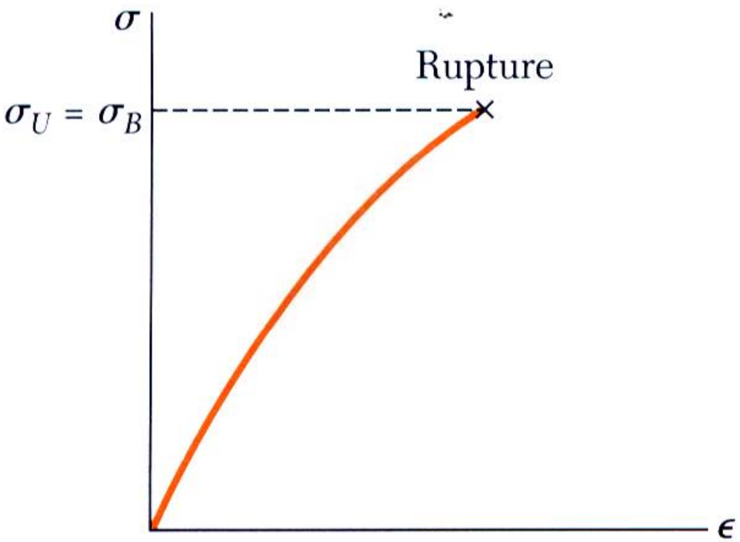
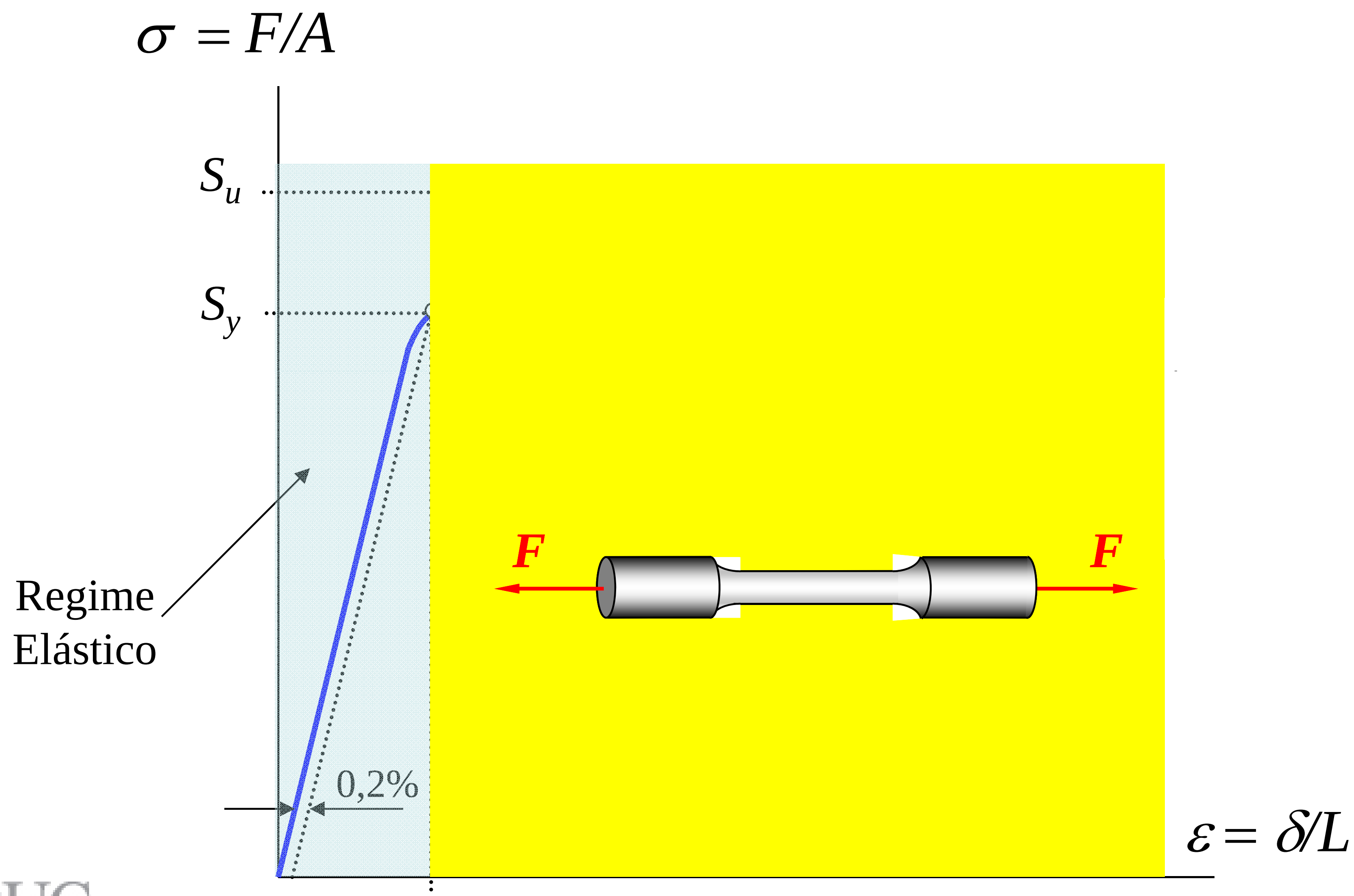


Fig. 2.11 Stress-strain diagram for a typical brittle material.

Figuras reproduzidas de:
Beer, Johnston & DeWolf, *Mechanics of Materials*, 4th *ed.*, McGraw-Hill, 2002

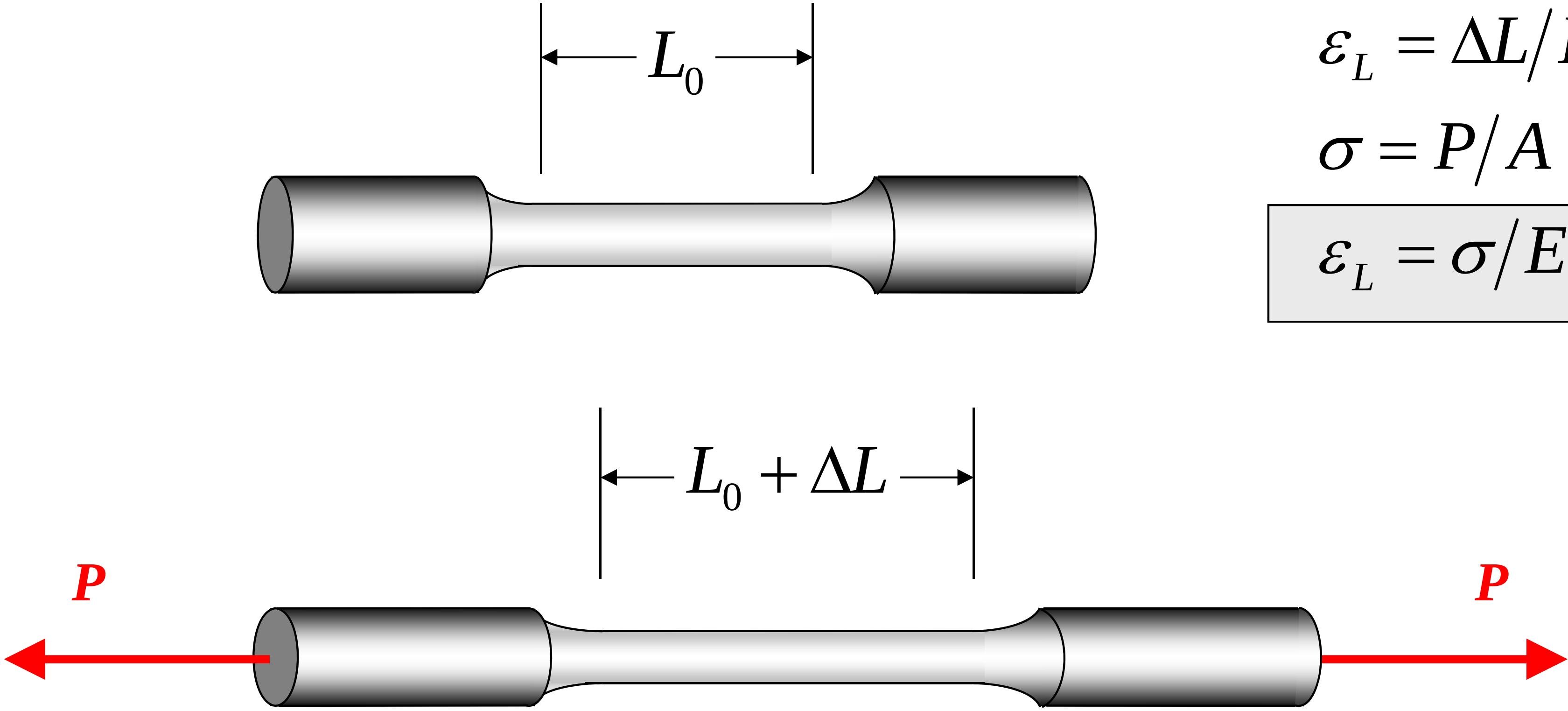
Relação Tensão *vs.* Deformação

Relação entre Tensão e Deformação



Relação Tensão *vs.* Deformação

Deformação longitudinal



$$\varepsilon_L = \Delta L / L_0$$

$$\sigma = P/A$$

$$\boxed{\varepsilon_L = \sigma / E}$$

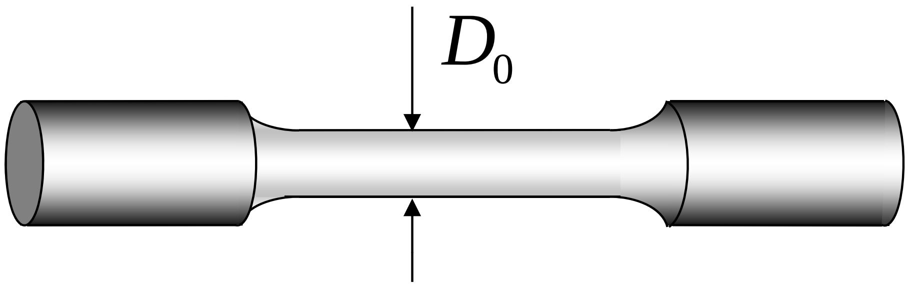
Relação Tensão *vs.* Deformação

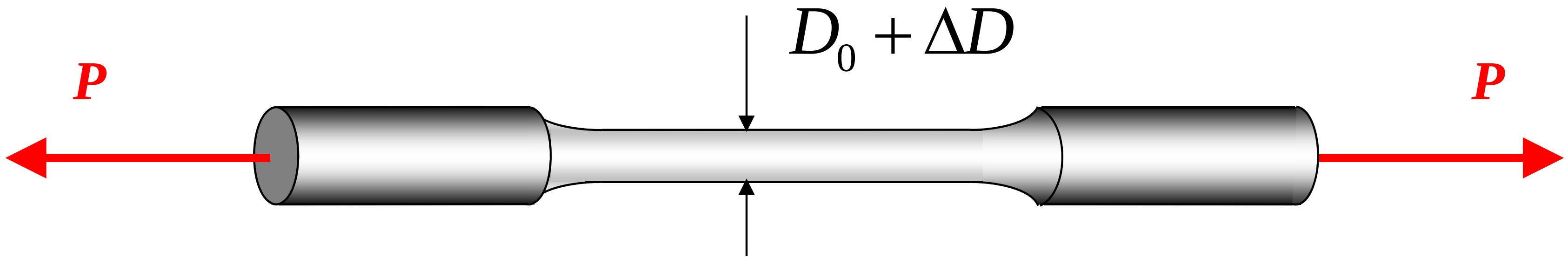
Deformação transversal

$$\varepsilon_T = \Delta D / D_0$$

$$\Delta D / D_0 = -\nu(\Delta L / L_0)$$

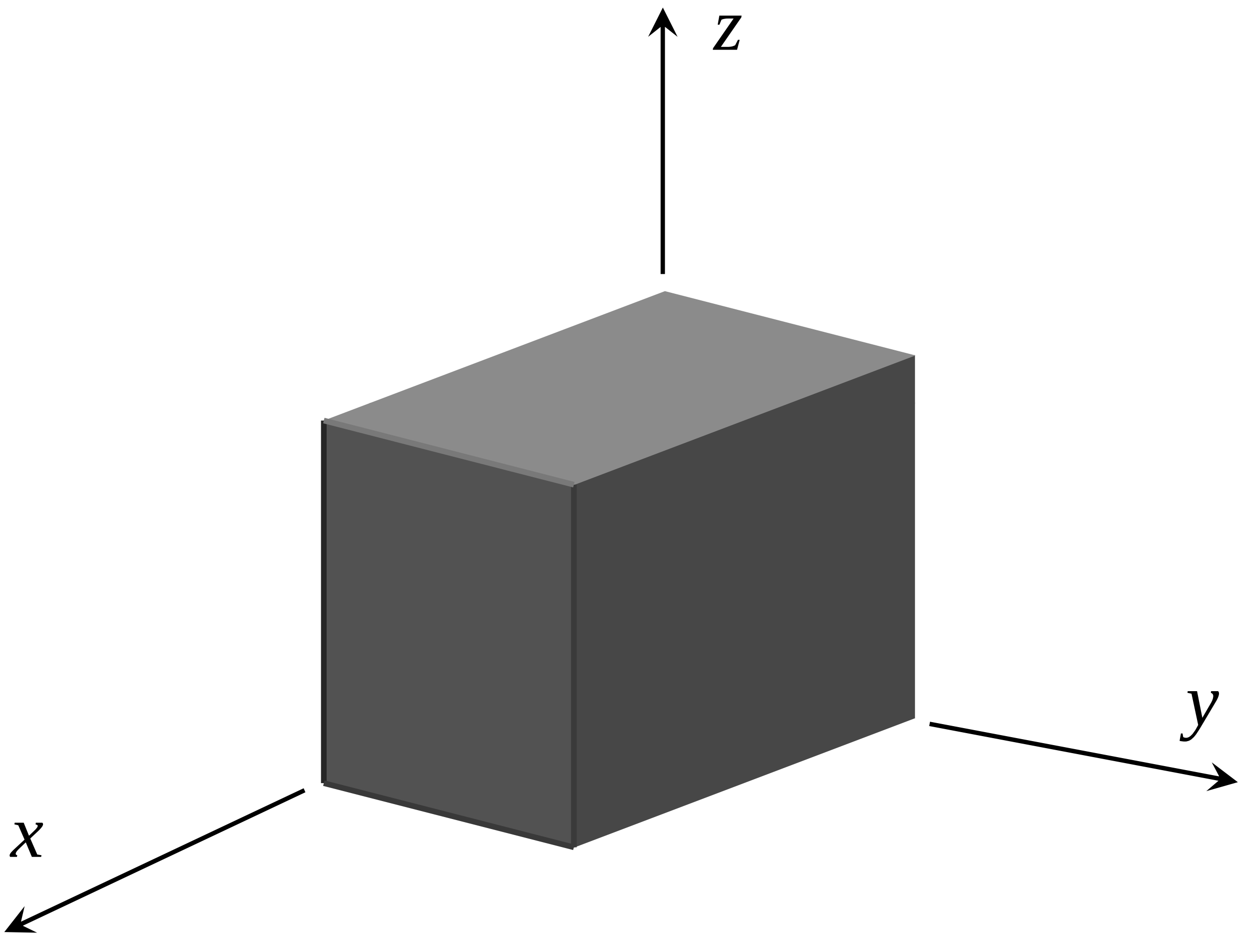
$$\boxed{\varepsilon_T = -\nu\varepsilon_L = -\nu(\sigma / E)}$$





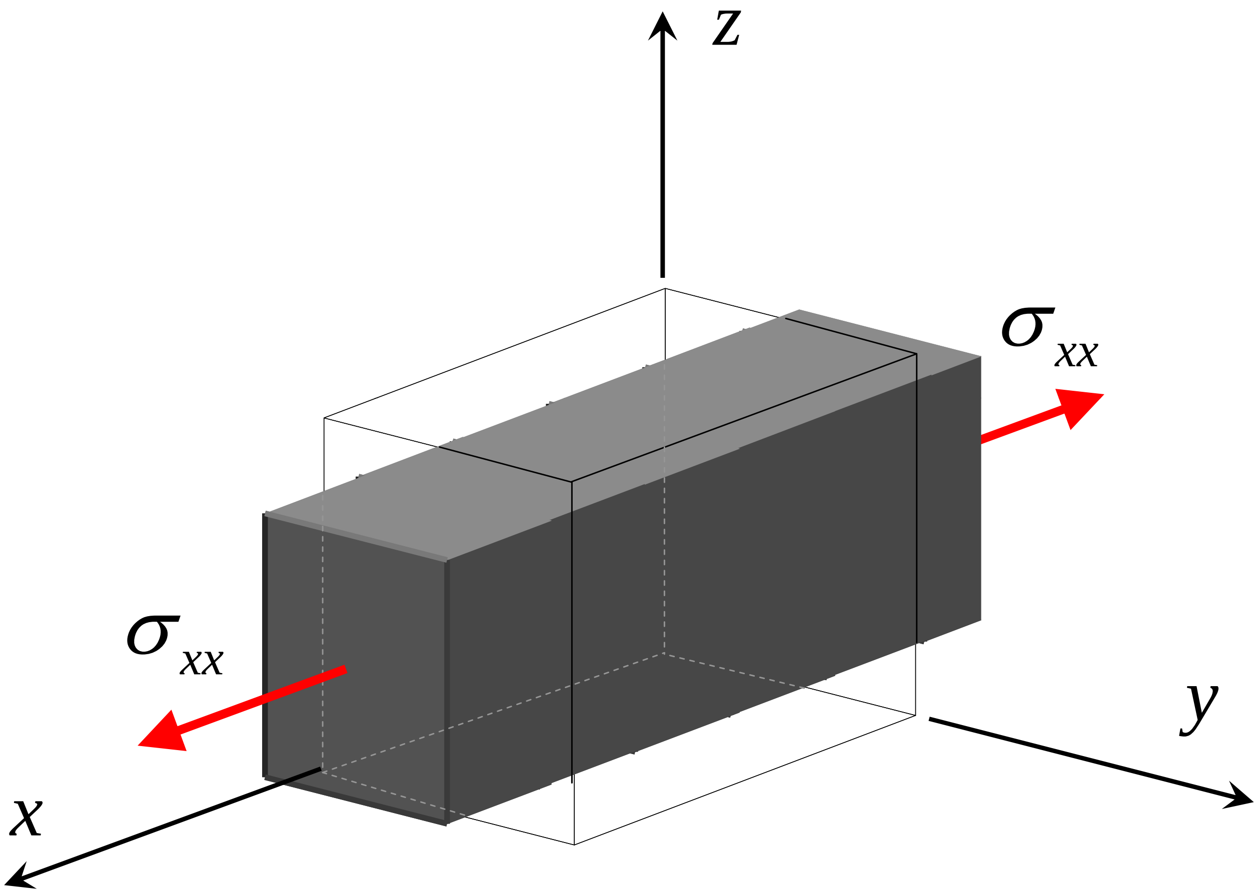
Relação Tensão *vs.* Deformação

Estado uniaxial de tensão (direção x)



Relação Tensão *vs.* Deformação

Estado uniaxial de tensão (direção x)



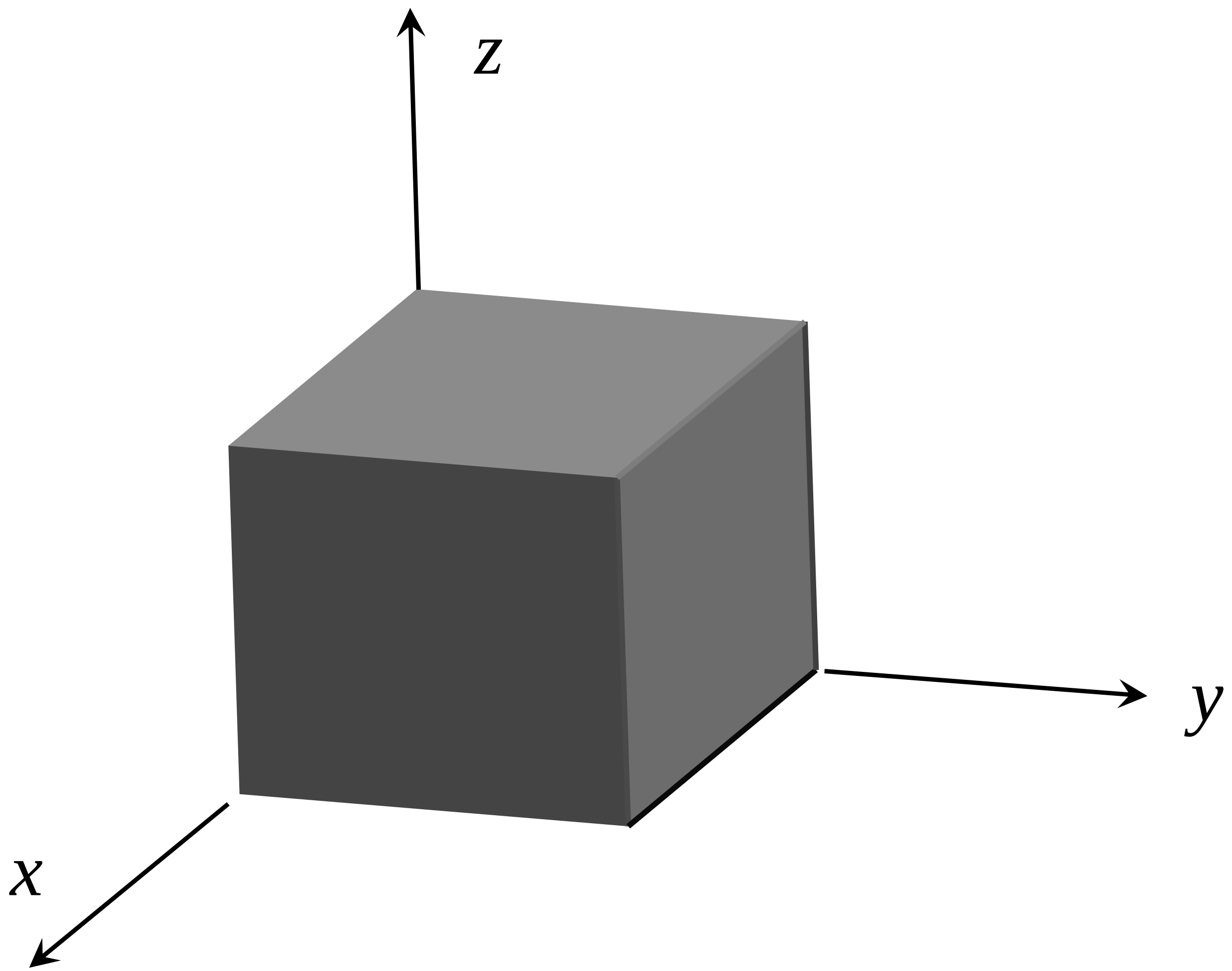
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

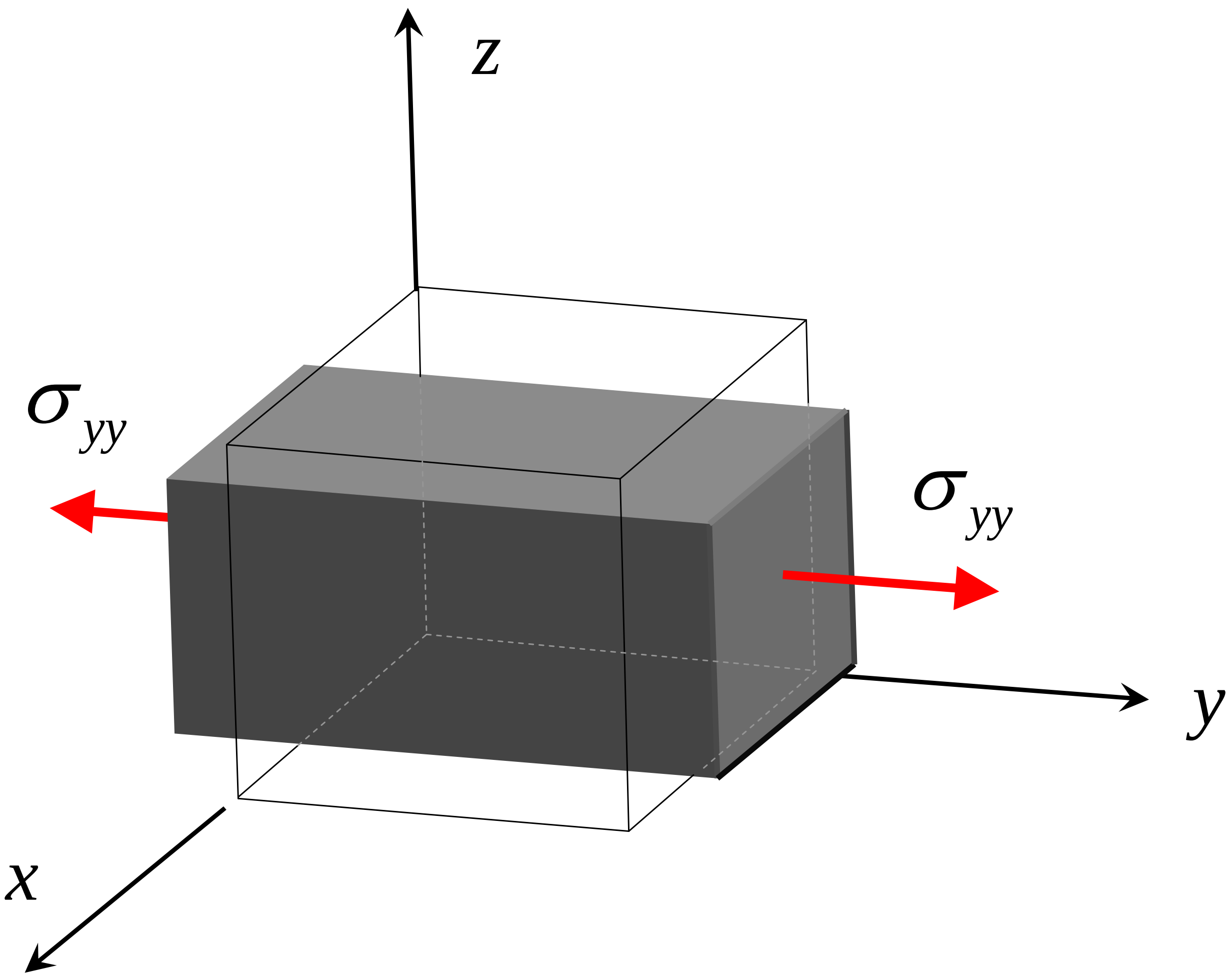
Relação Tensão *vs.* Deformação

Estado uniaxial de tensão (direção *y*)



Relação Tensão *vs.* Deformação

Estado uniaxial de tensão (direção y)



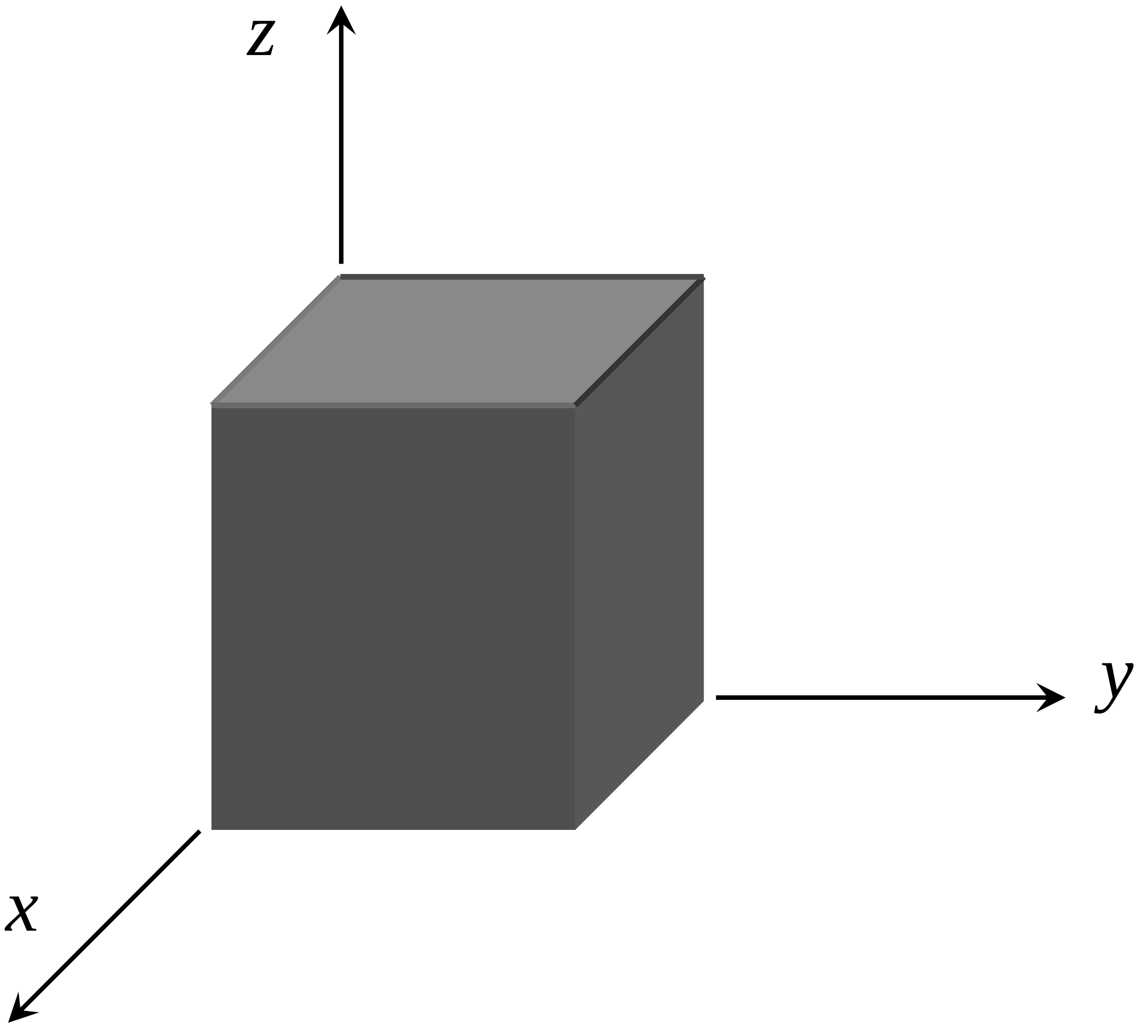
$$\varepsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

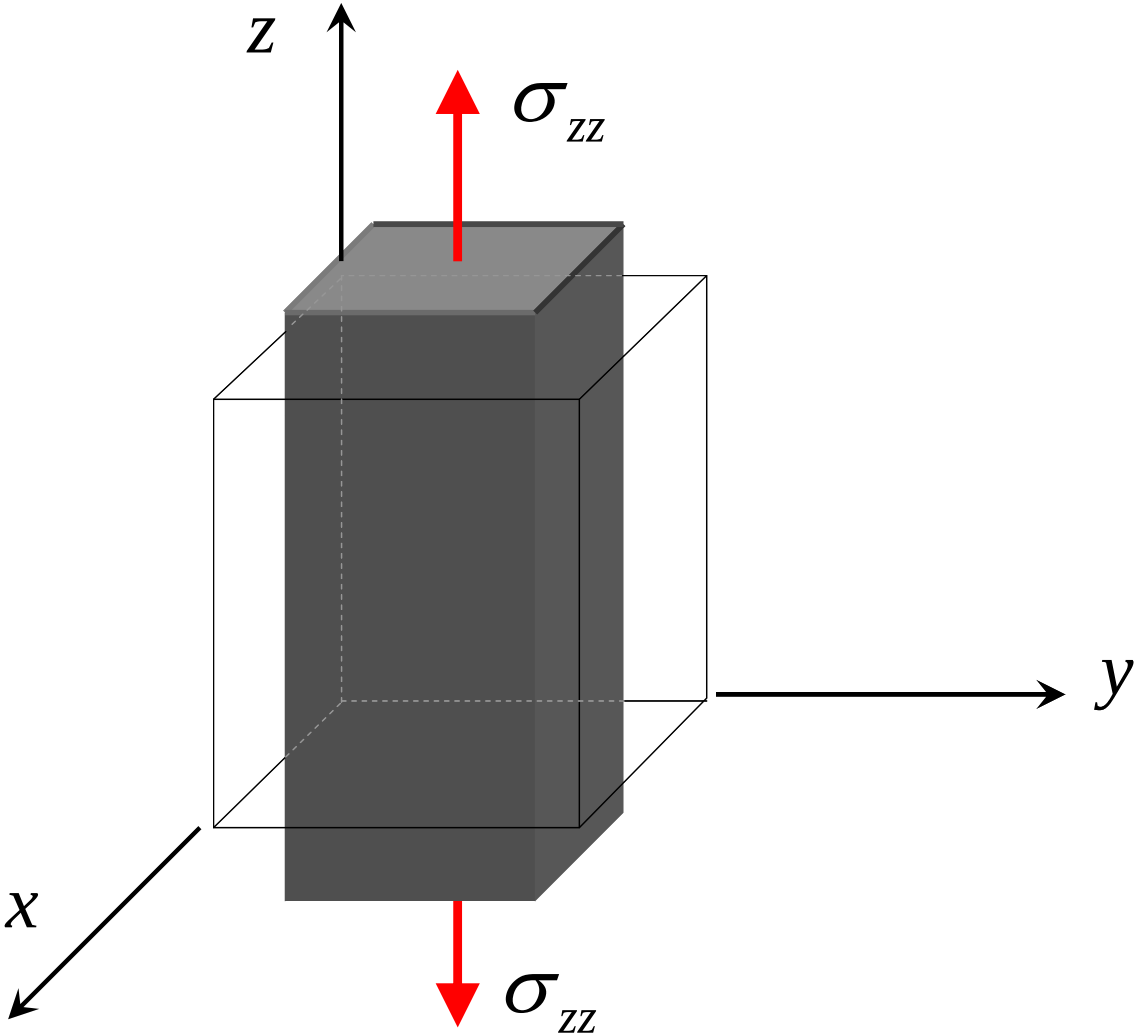
Relação Tensão *vs.* Deformação

Estado uniaxial de tensão (direção *z*)



Relação Tensão *vs.* Deformação

Estado uniaxial de tensão (direção y)



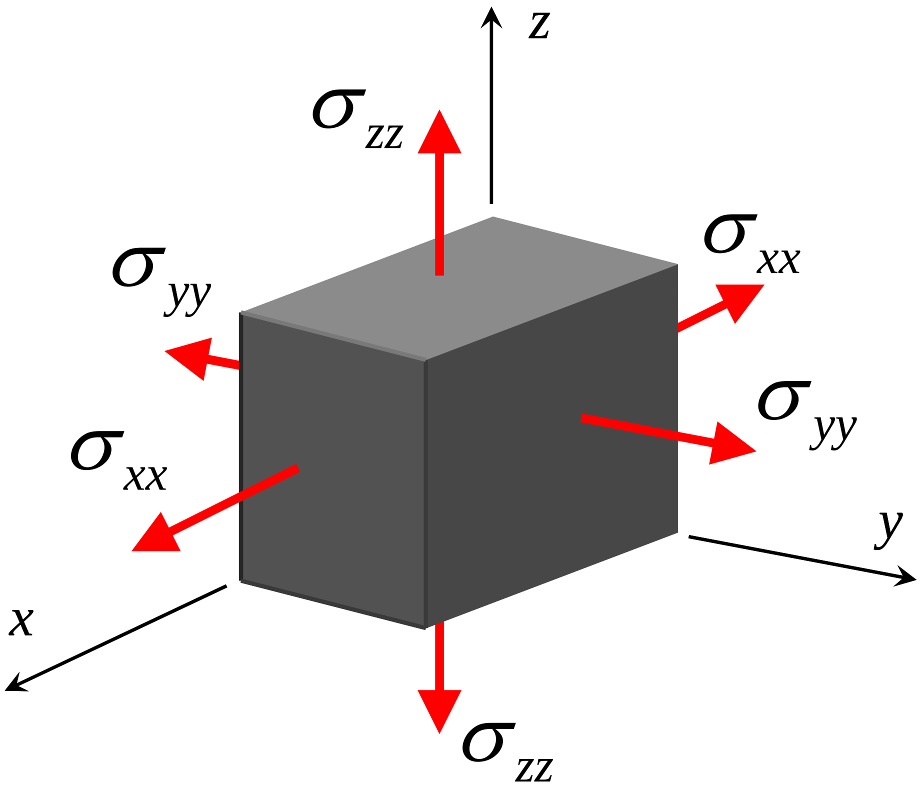
$$\varepsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

Relação Tensão *vs.* Deformação

Estado triaxial de tensão (emprega-se o princípio da superposição):



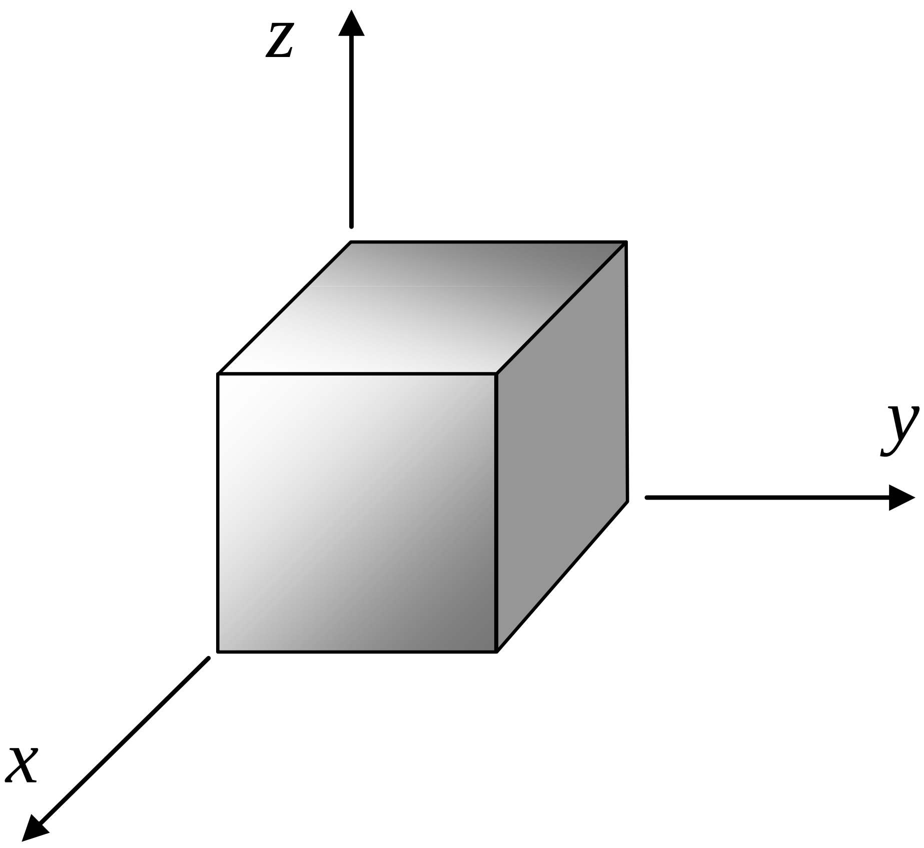
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

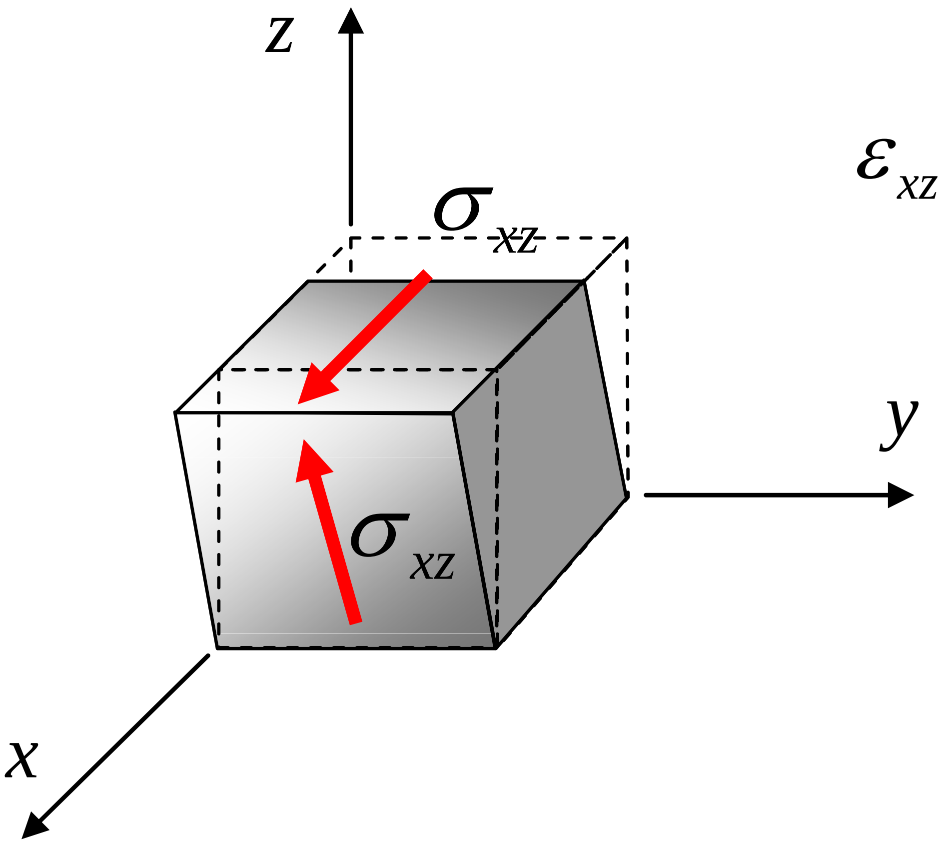
Relação Tensão *vs.* Deformação

Cisalhamento puro (plano *xz*)



Relação Tensão *vs.* Deformação

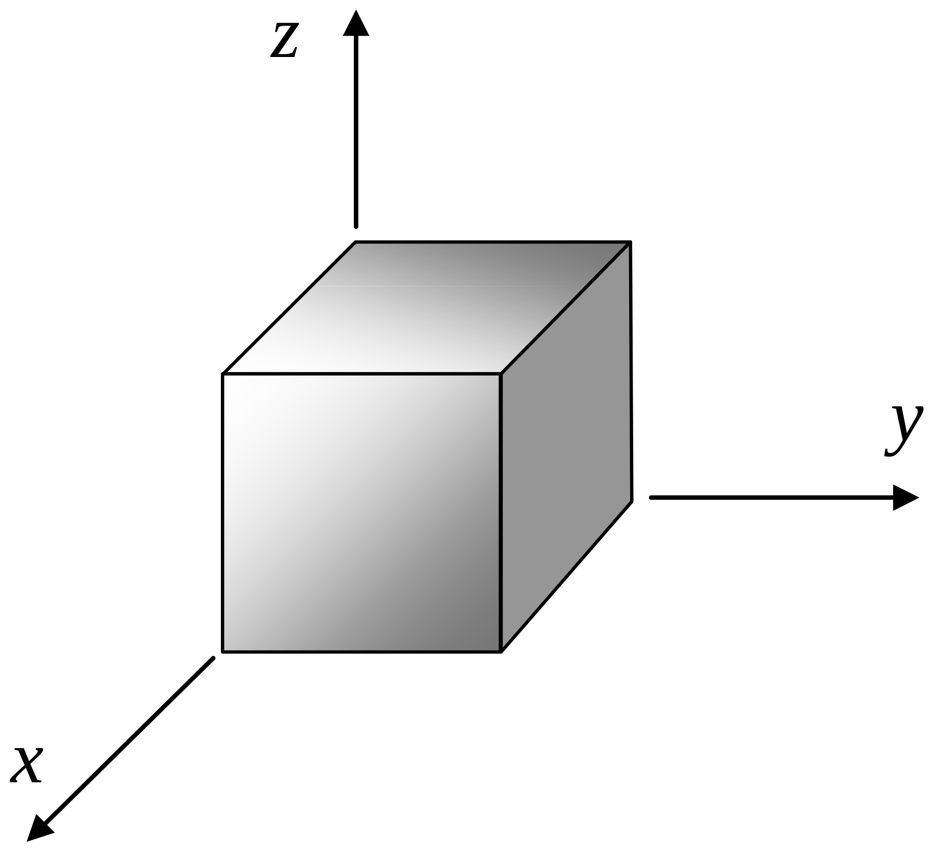
Cisalhamento puro (plano *xz*)



$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

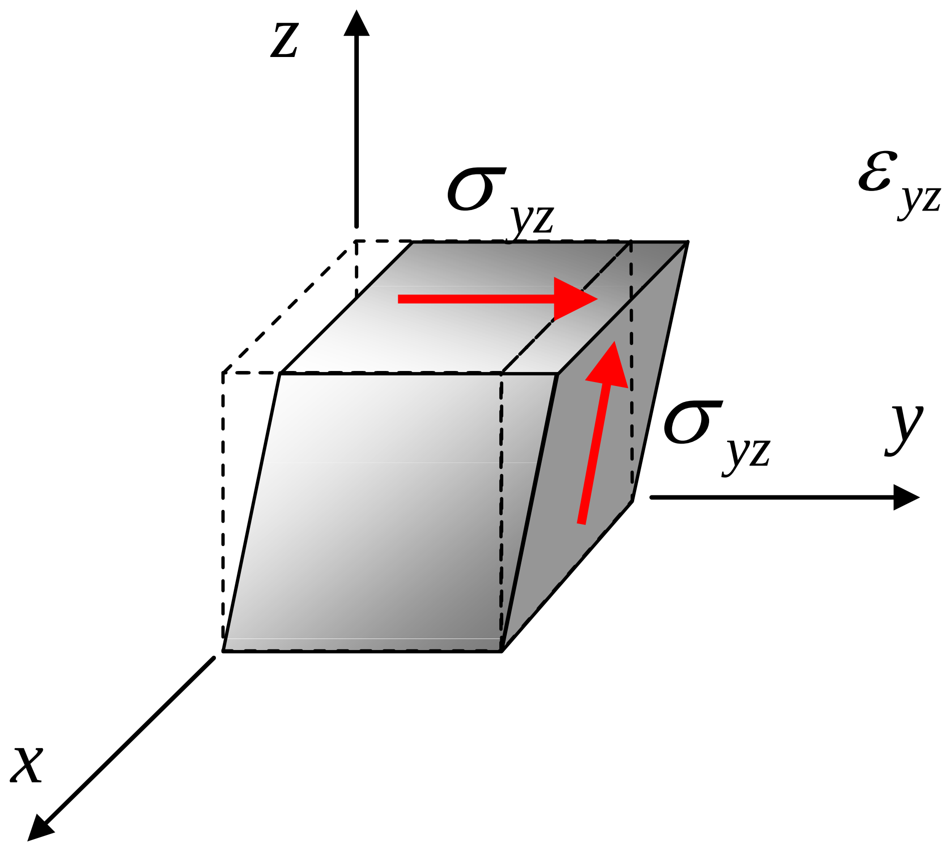
Relação Tensão *vs.* Deformação

Cisalhamento puro (plano *yz*)



Relação Tensão *vs.* Deformação

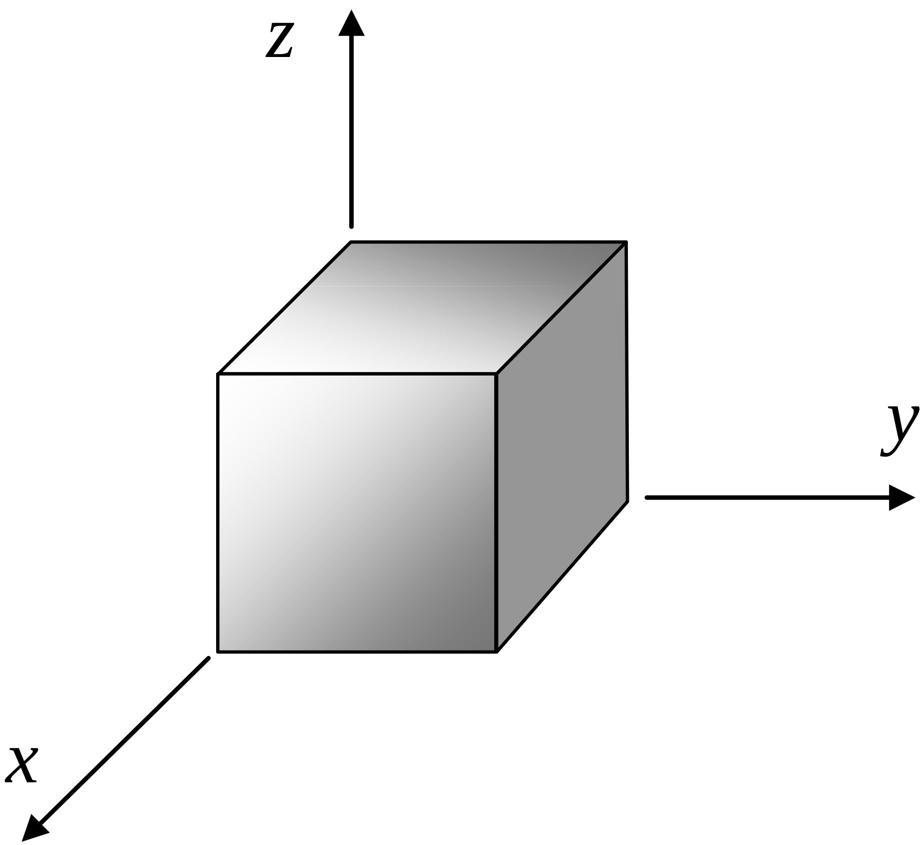
Cisalhamento puro (plano *yz*)



$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

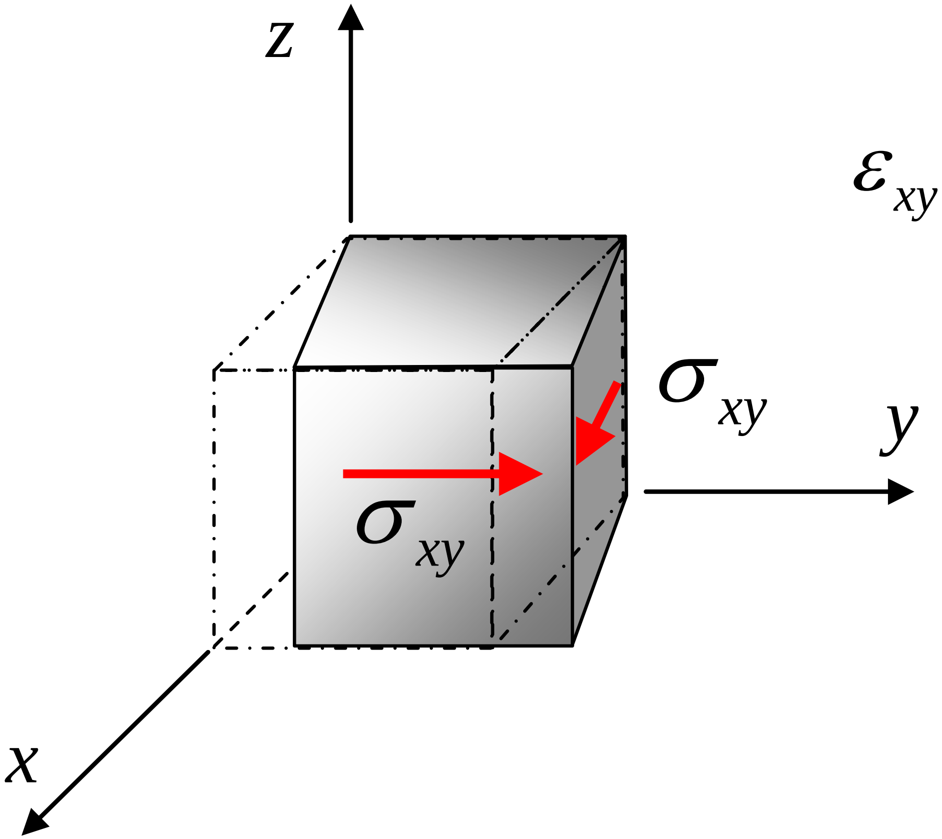
Relação Tensão *vs.* Deformação

Cisalhamento puro (plano *xy*)



Relação Tensão *vs.* Deformação

Cisalhamento puro (plano *xy*)



$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

Relação Tensão *vs.* Deformação

Empregando o princípio da superposição:

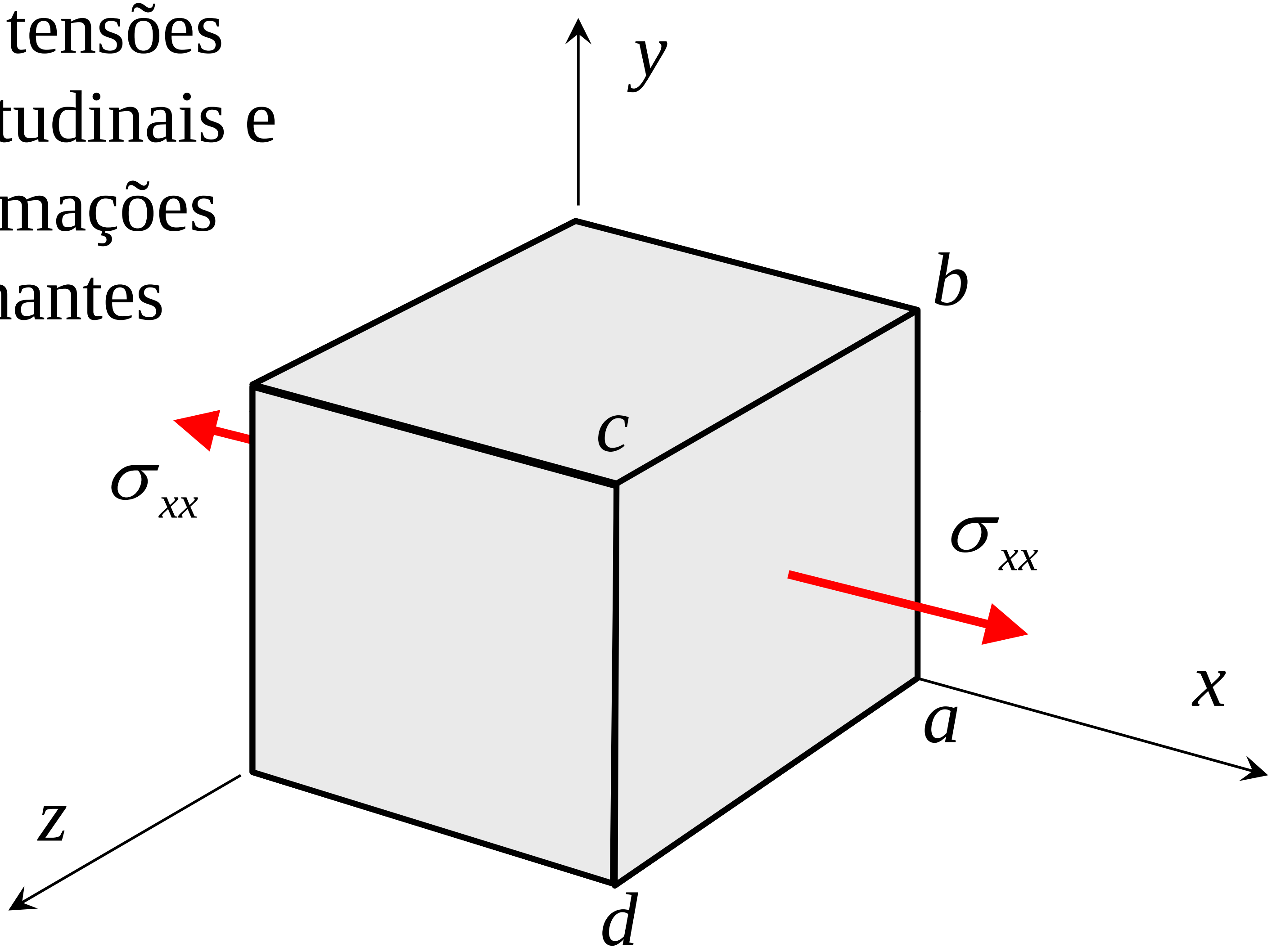
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

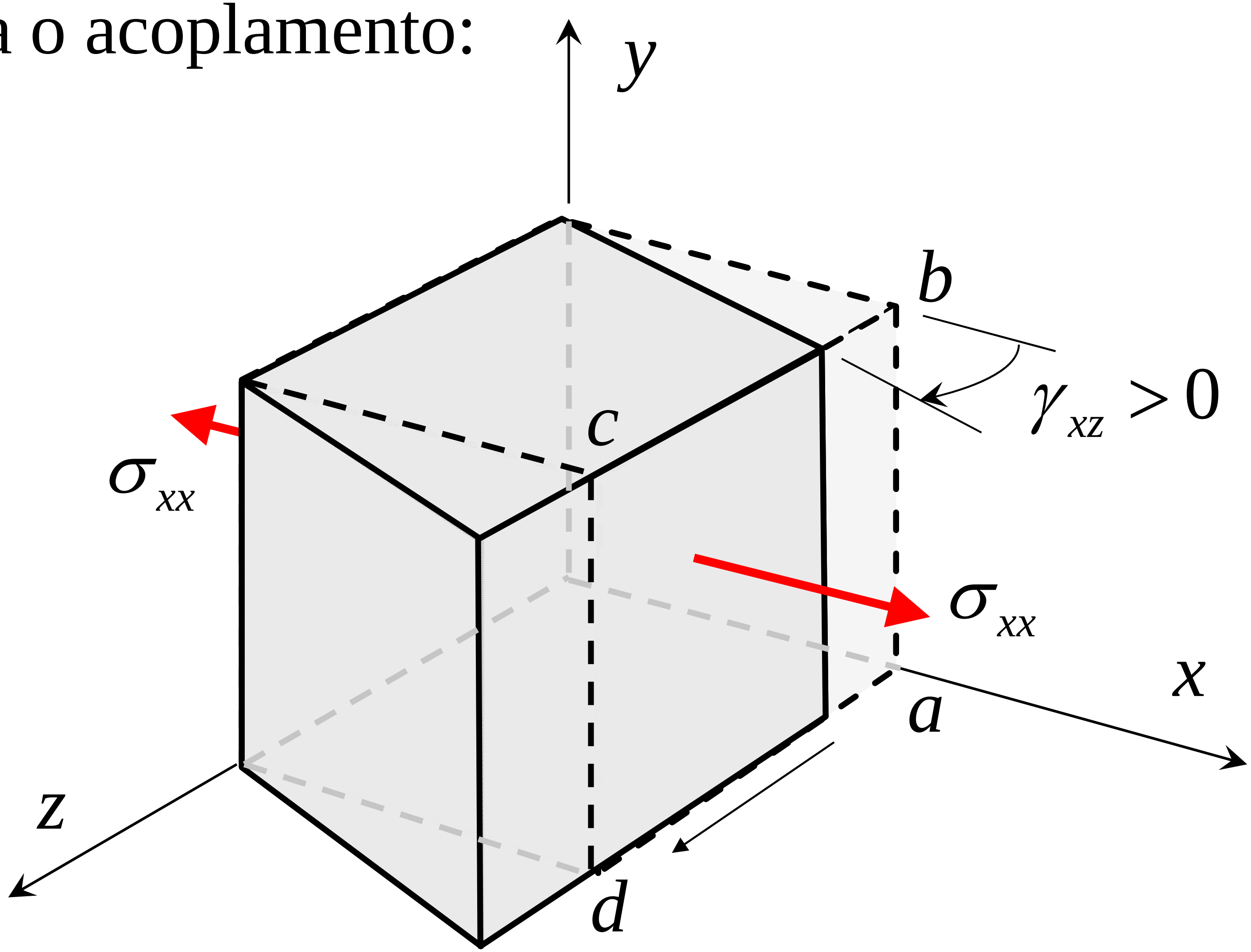
Relação Tensão *vs.* Deformação

Acoplamento entre tensões longitudinais e deformações cisalhantes



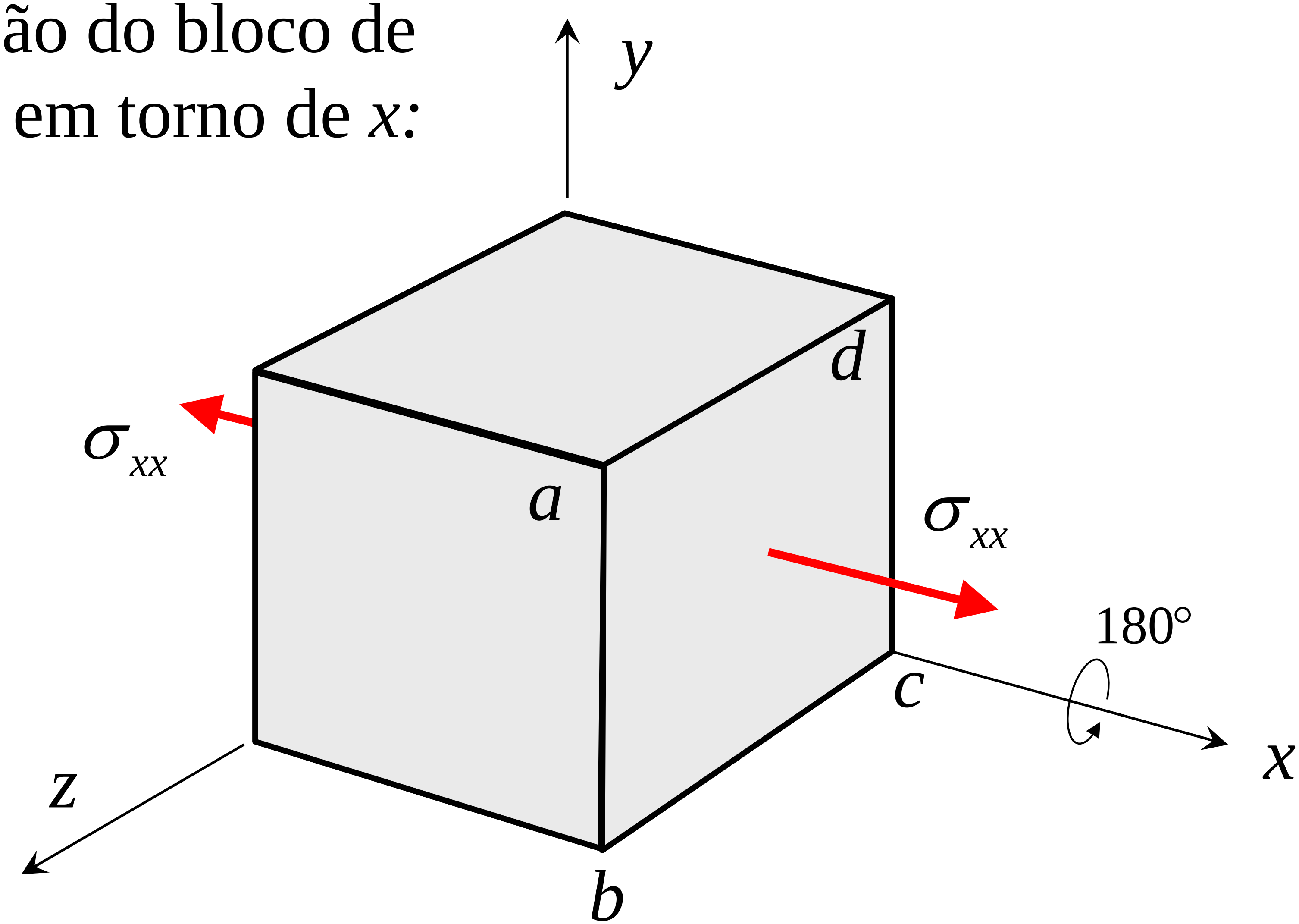
Relação Tensão *vs.* Deformação

Supondo-se que
existe o acoplamento:



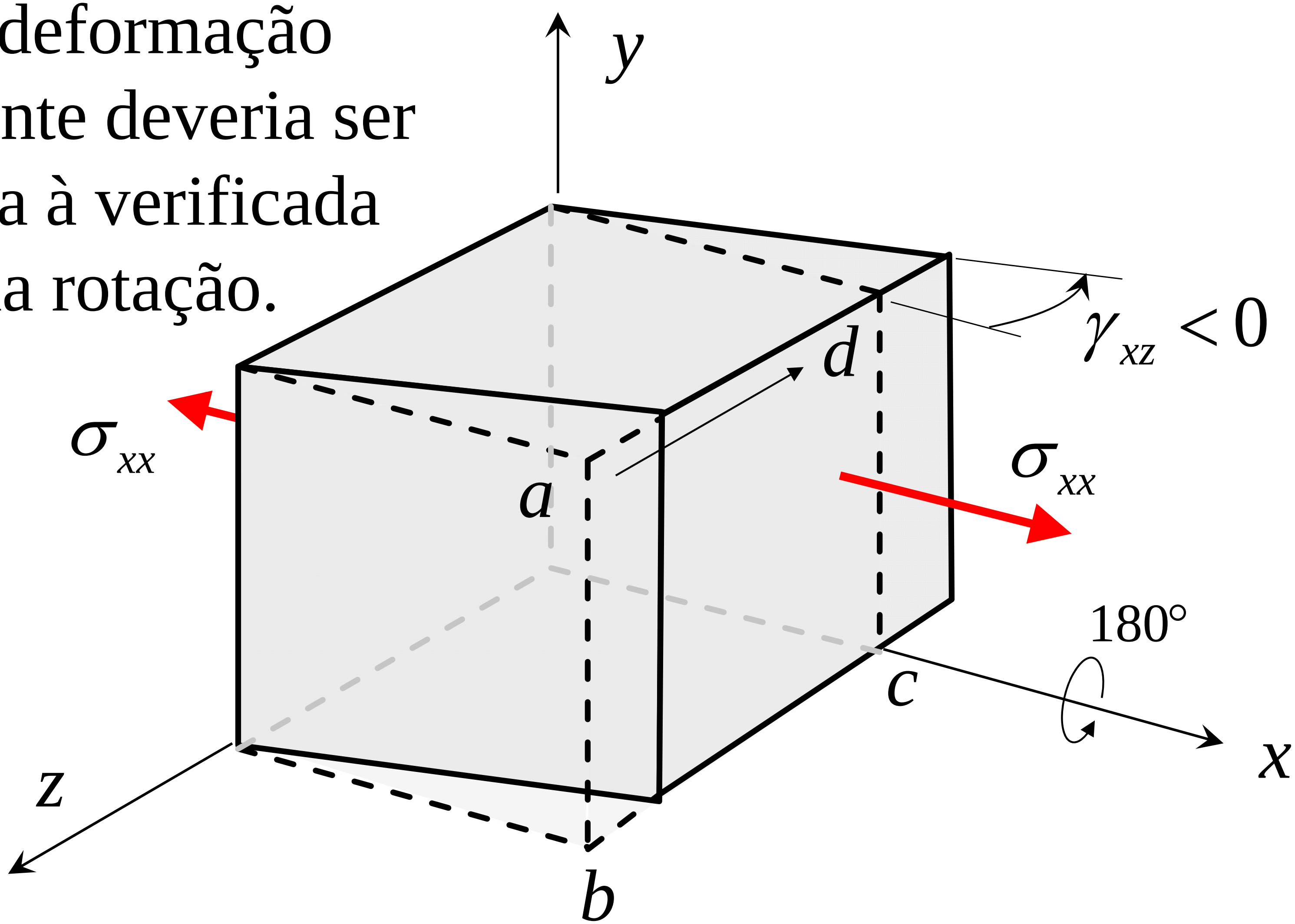
Relação Tensão *vs.* Deformação

Considerando uma rotação do bloco de 180° em torno de *x*:



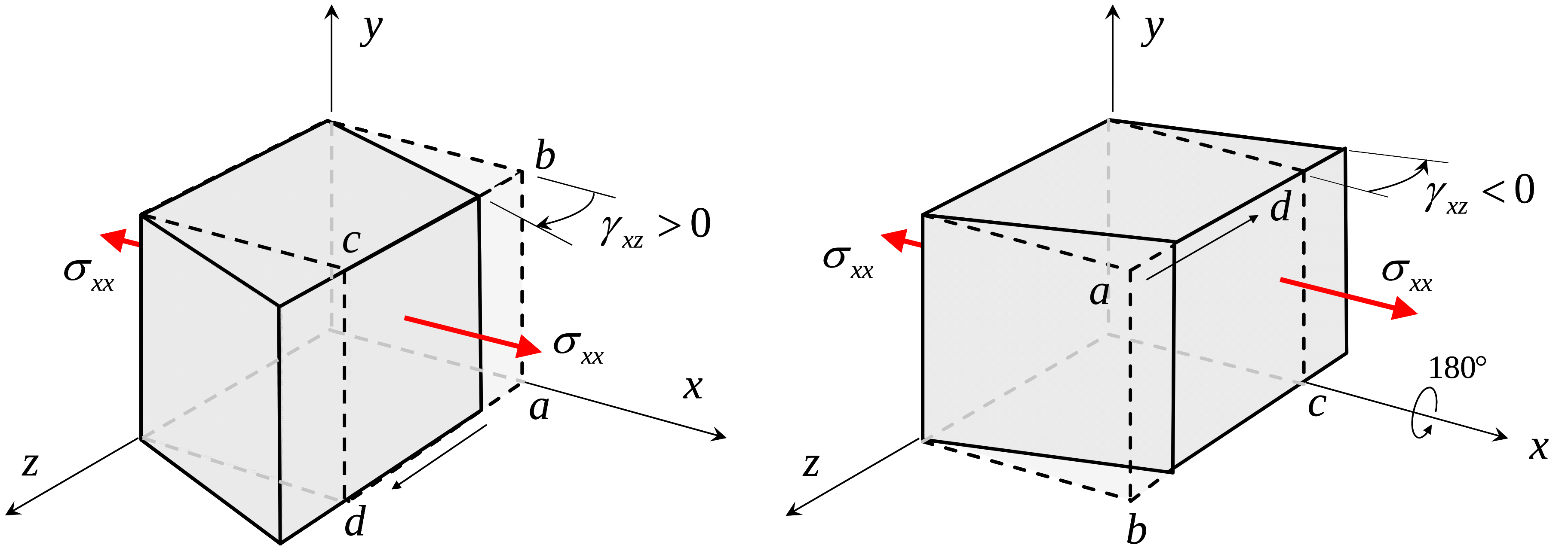
Relação Tensão *vs.* Deformação

Material é isotrópico, logo a deformação cisalhante deveria ser idêntica à verificada antes da rotação.



Relação Tensão *vs.* Deformação

Para materiais isotrópicos, tensões normais ***não*** produzem deformações cisalhantes. Pode-se mostrar que tensões cisalhantes também ***não*** produzem deformações longitudinais.



Relação Tensão *vs.* Deformação

Equações constitutivas para material isotrópico, linear (pequenas deformações) e elástico

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

Relação Tensão *vs*. Deformação

Considerando variações de temperatura:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Equilíbrio

- Equações de Equilíbrio

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{zz}}{\partial z} = 0$$

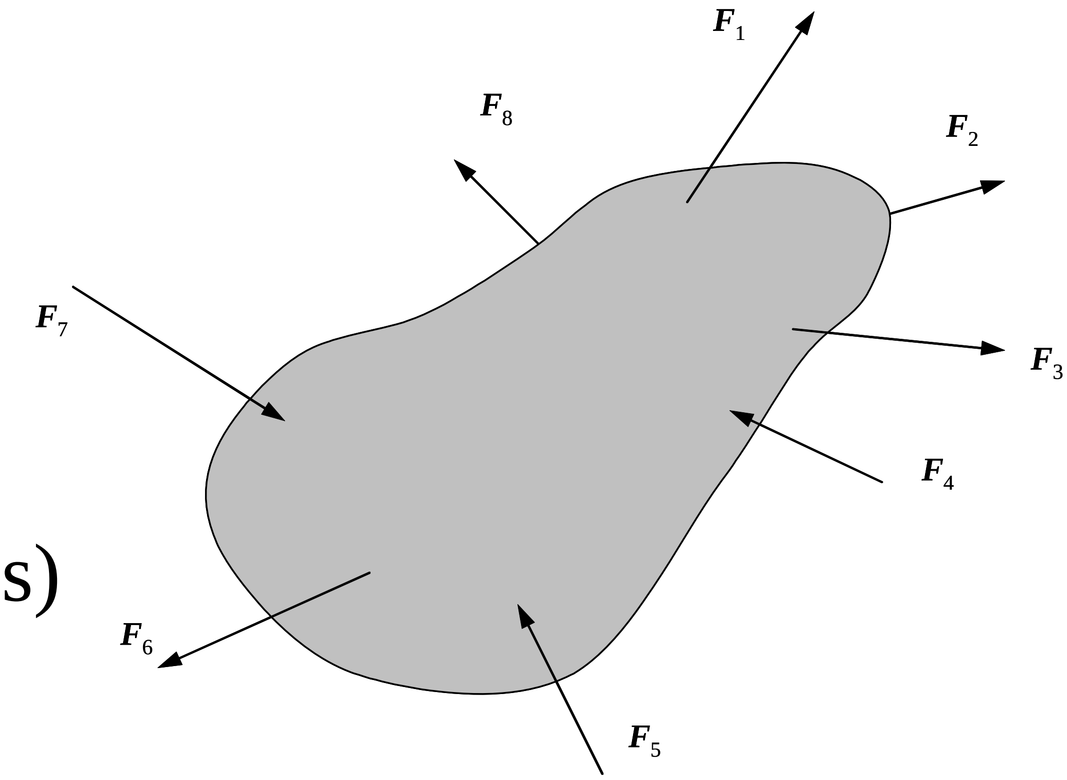
Teoria da Elasticidade

Problema

Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

Determinar

- Esforços internos (tensões)
- Deformações
- Deslocamentos



Teoria da Elasticidade

- Equações de Equilíbrio

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{zz}}{\partial z} = 0$$

Teoria da Elasticidade

- Relações entre deslocamentos e deformações

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

Teoria da Elasticidade

- Relações constitutivas (tensão *vs*. deformação)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\,\Delta T \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\,\Delta T \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\,\Delta T \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

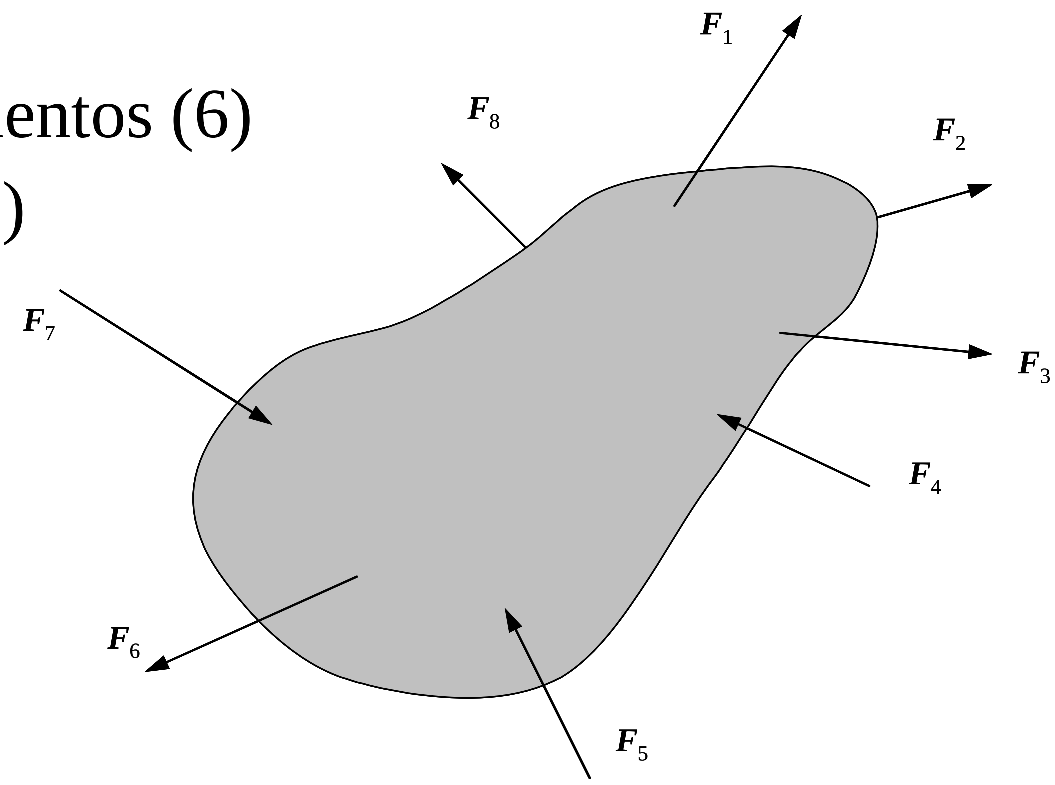
Teoria da Elasticidade

- 15 Equações
  - Equilíbrio (3)
  - Deformação *vs.* Deslocamentos (6)
  - Tensão *vs.* Deformação (6)
- 15 Variáveis:

$$u_x, u_y, u_z$$

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$$

$$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$$



- Condições de contorno