

Departamento de Engenharia Mecânica



Mecânica dos Sólidos I

Parte 3 – Estado Plano de Tensão

Prof. Arthur M. B. Braga

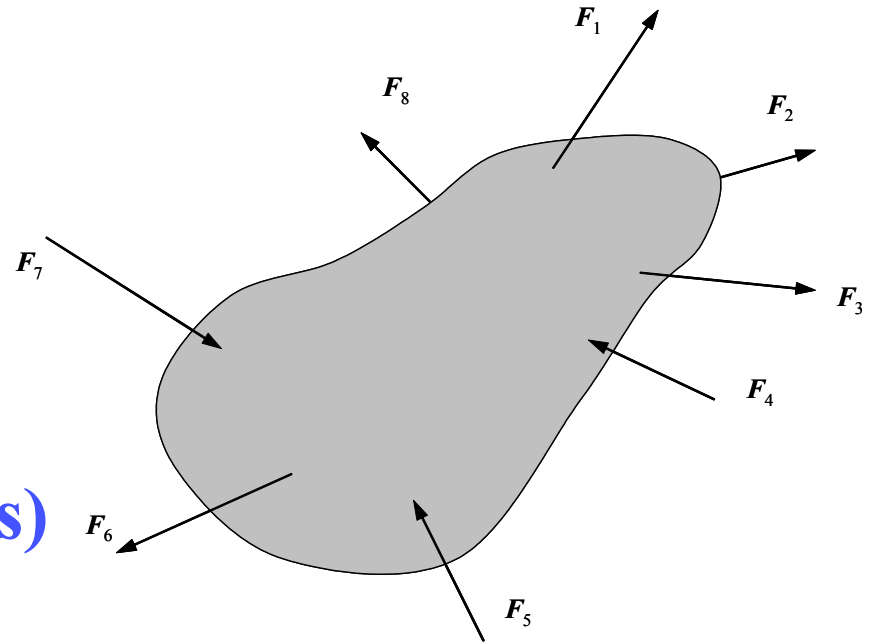
Mecânica dos Sólidos

Problema

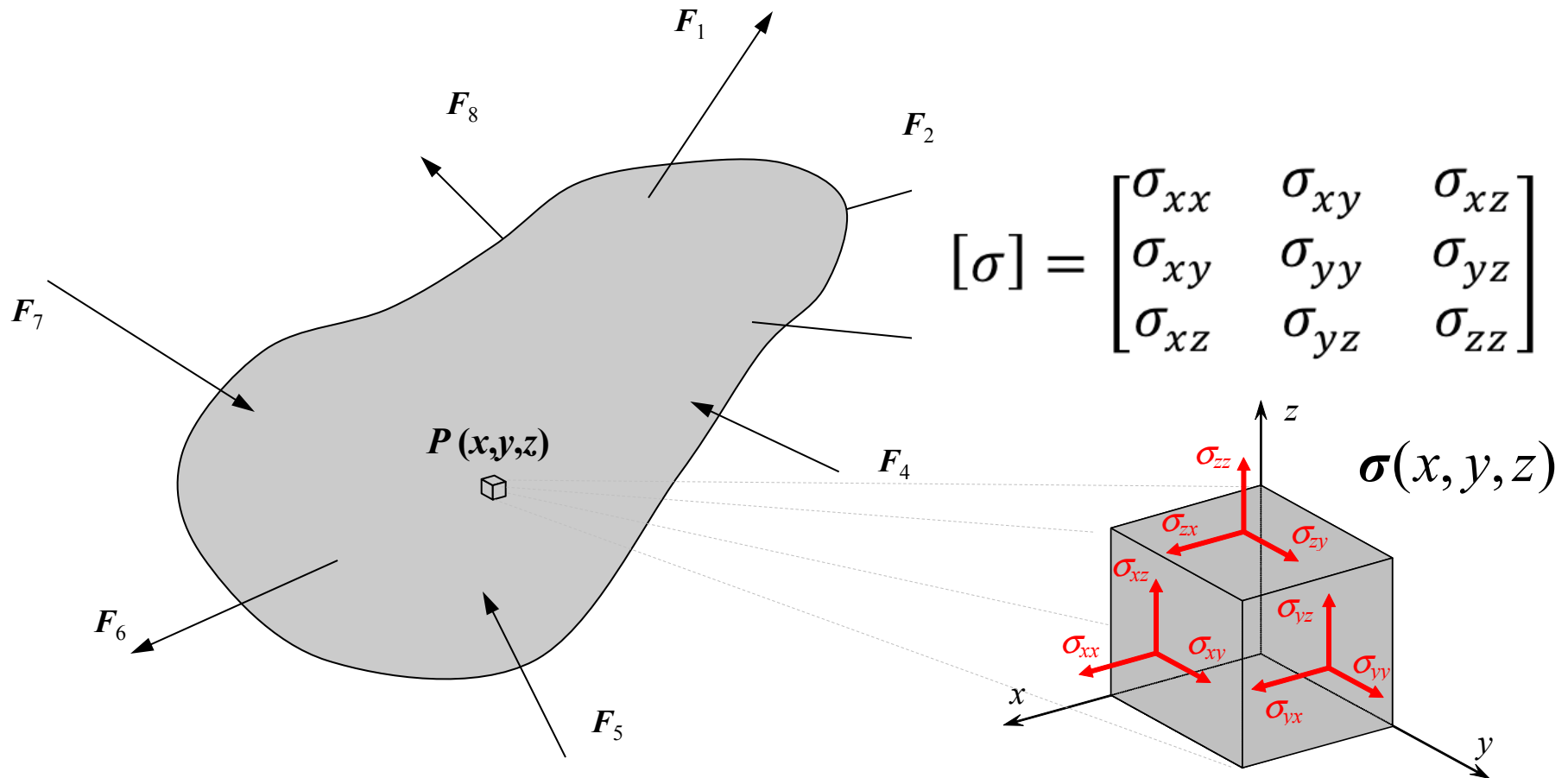
Corpo sujeito a ação de esforços externos (forças, momentos, etc.)

Determinar

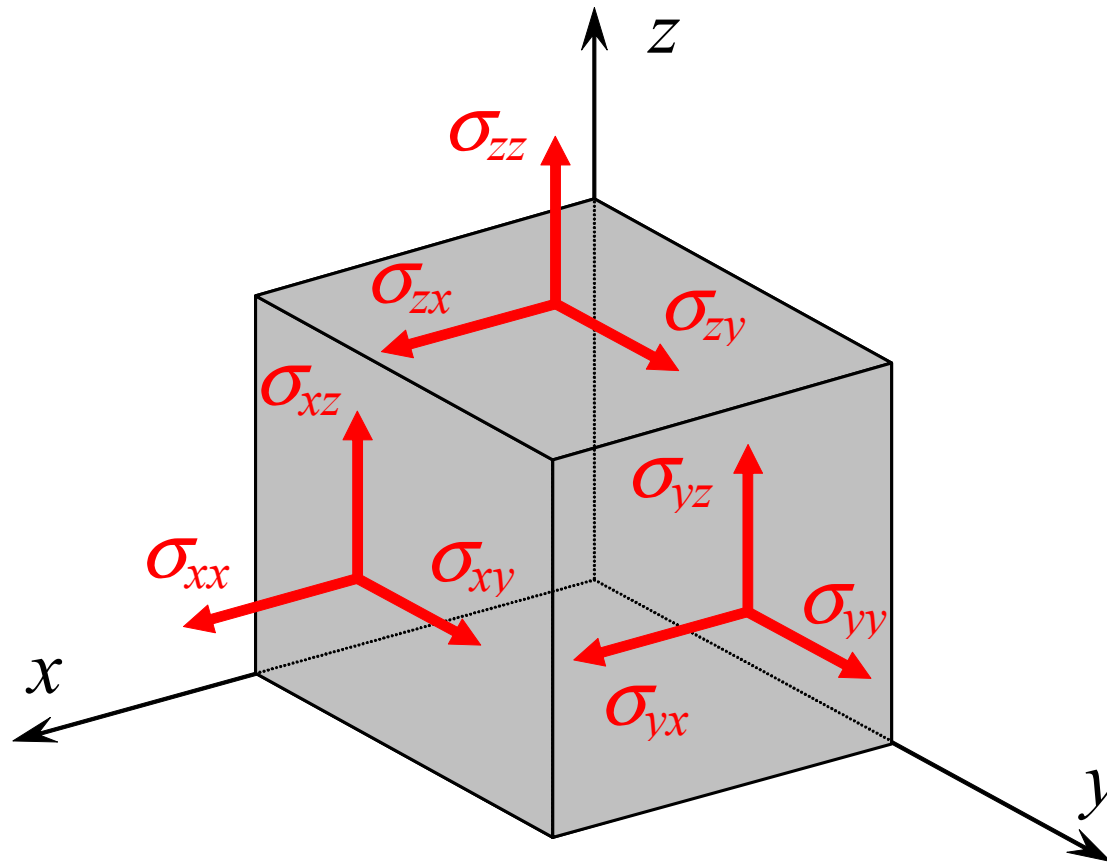
- **Esforços internos (tensões)**
- Deformações
- Deslocamentos



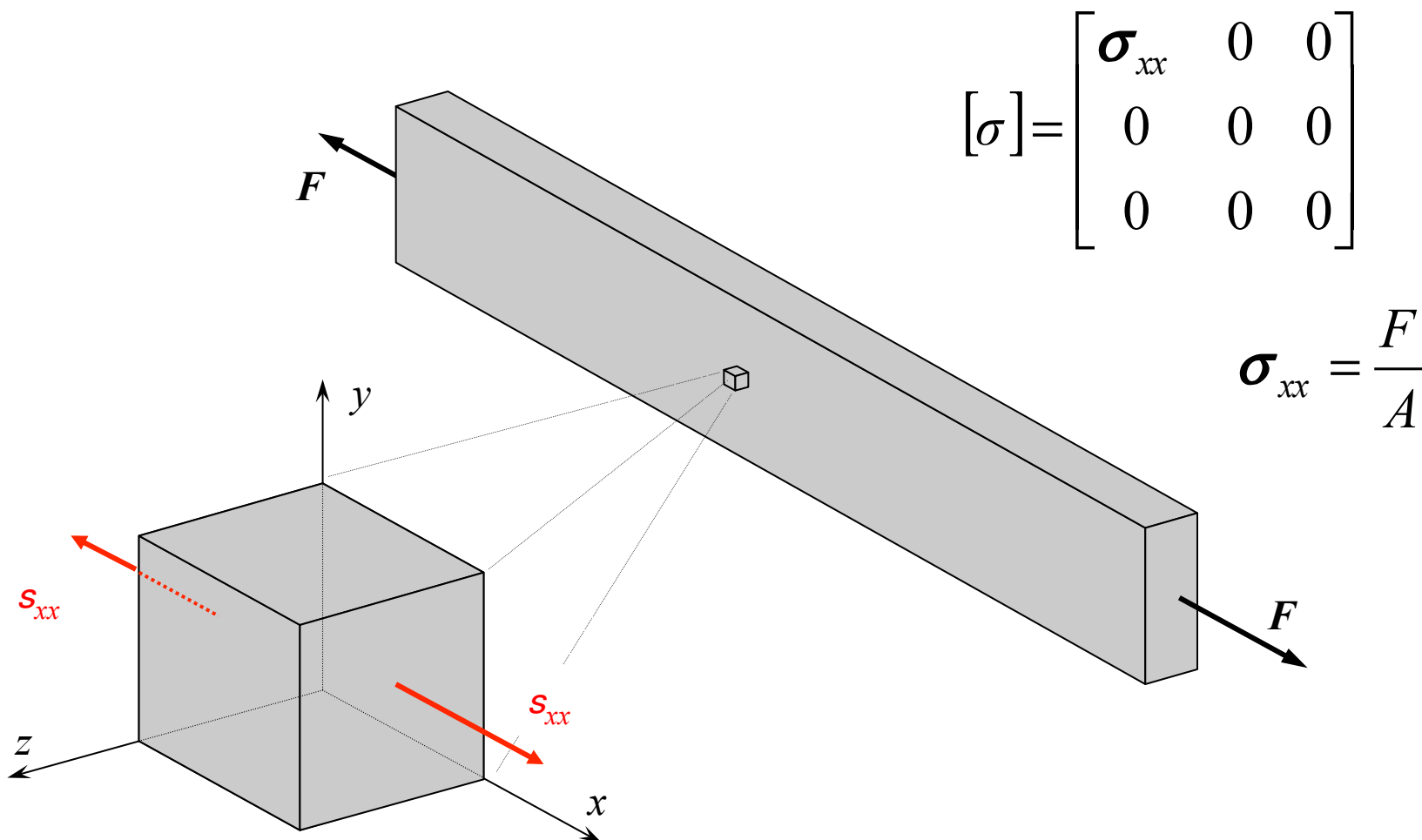
Determinação da Distribuição de Tensão no Corpo Sujeito à Ação de Forças Externas



Representação Gráfica do Estado de Tensão no Ponto (Paralelepípedo Fundamental)

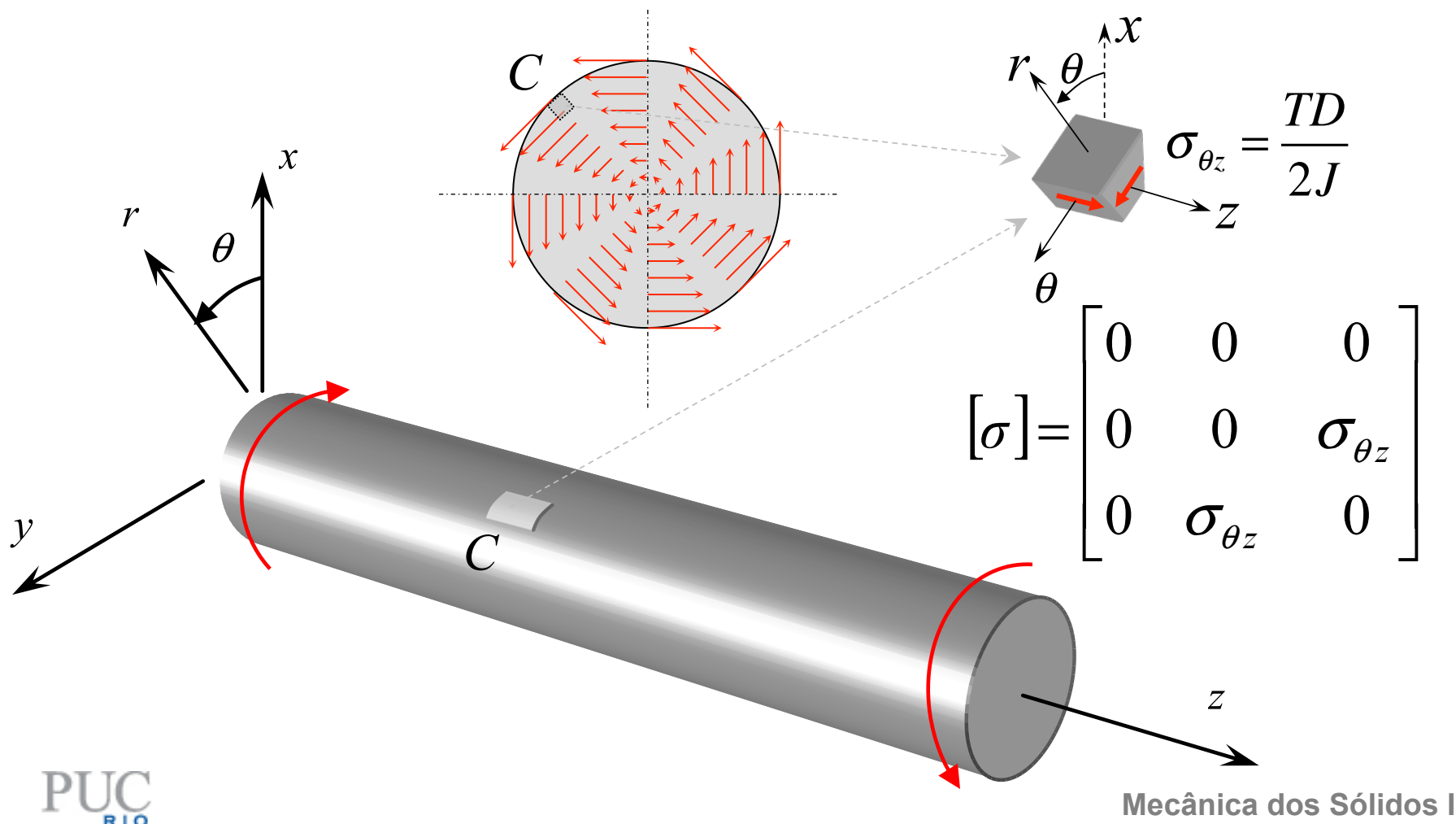


Barras Carregadas Axialmente



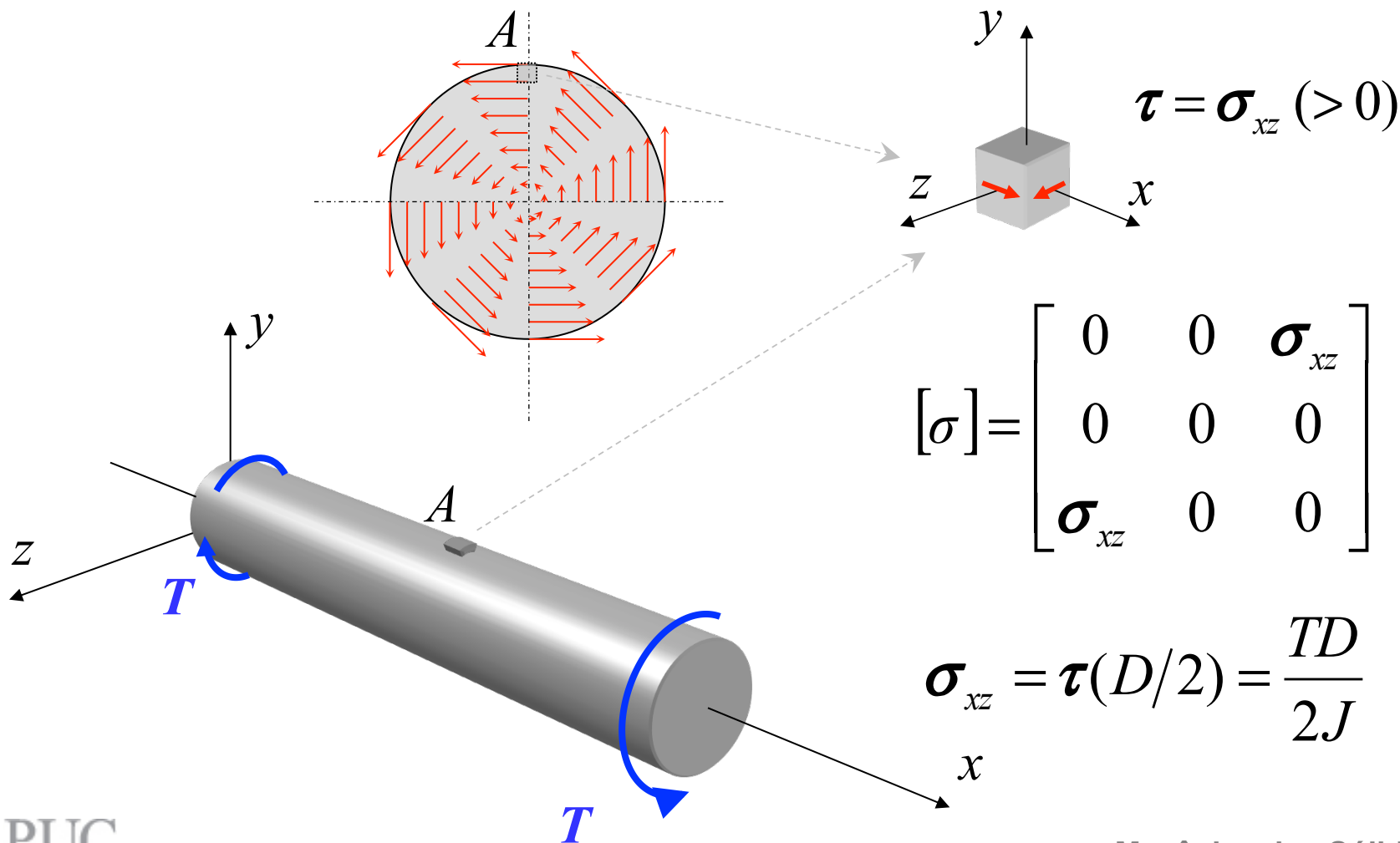
Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção

Em coordenadas cilíndricas



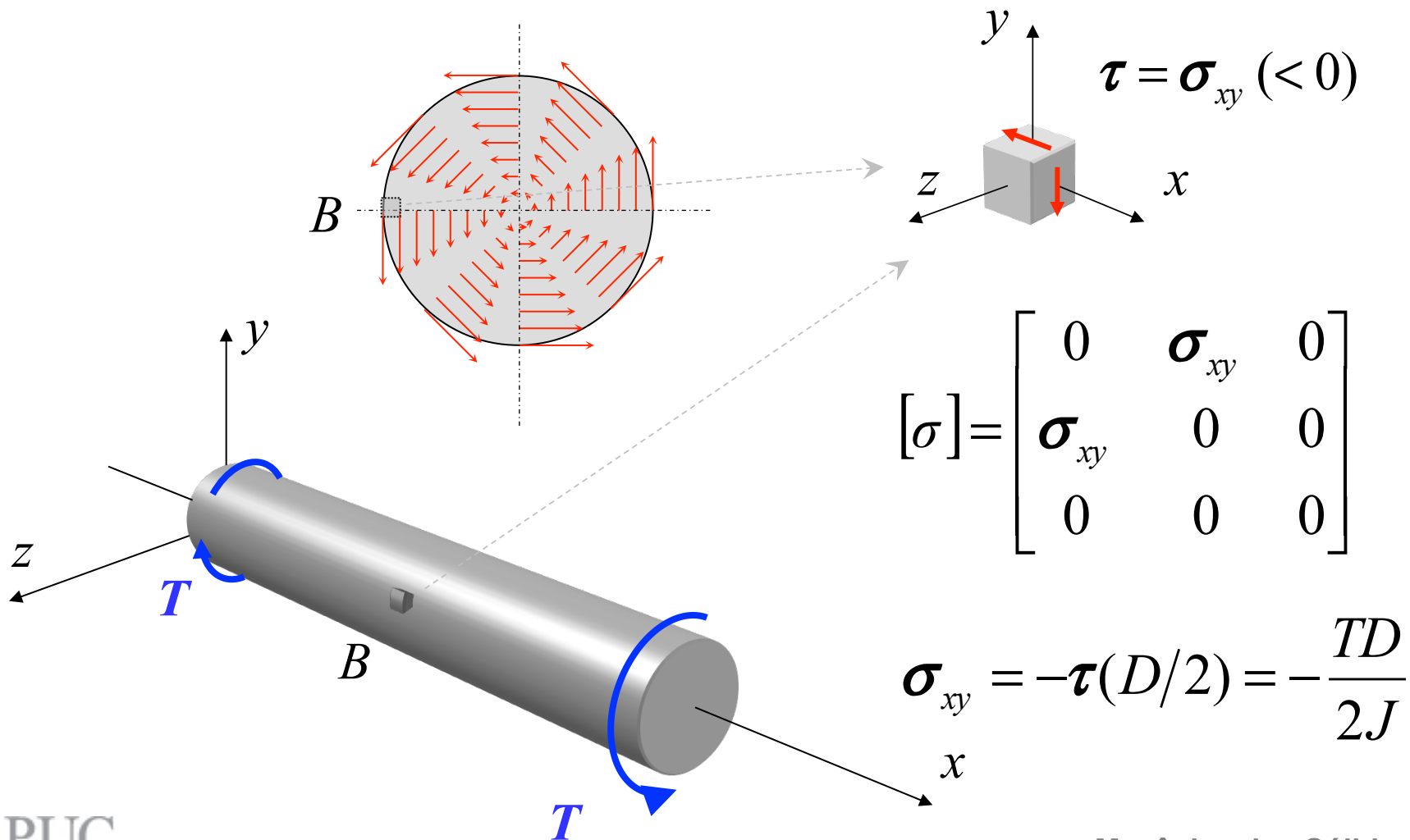
Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção

Em coordenadas Cartesianas



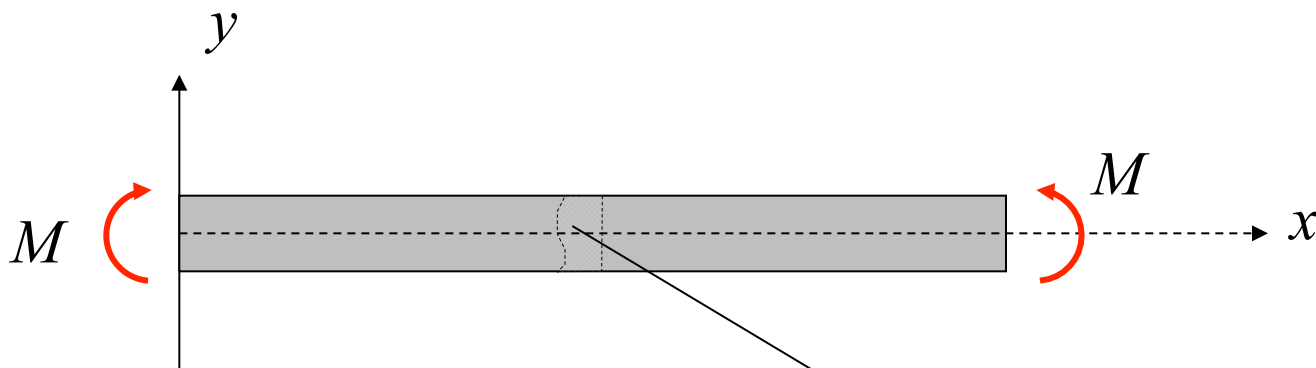
Eixos Sujeitos a Carregamentos de Torção

Em coordenadas Cartesianas



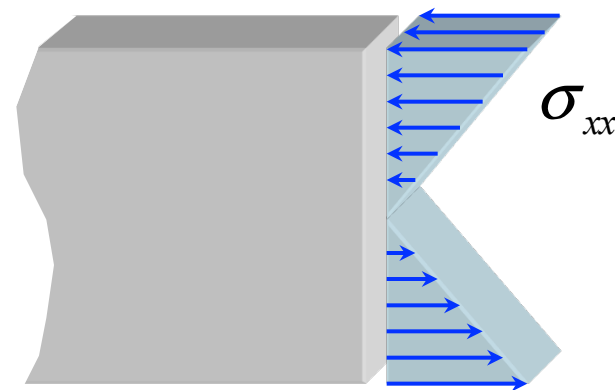
Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Tensões Normais de Flexão – Causadas pelo Momento Fletor

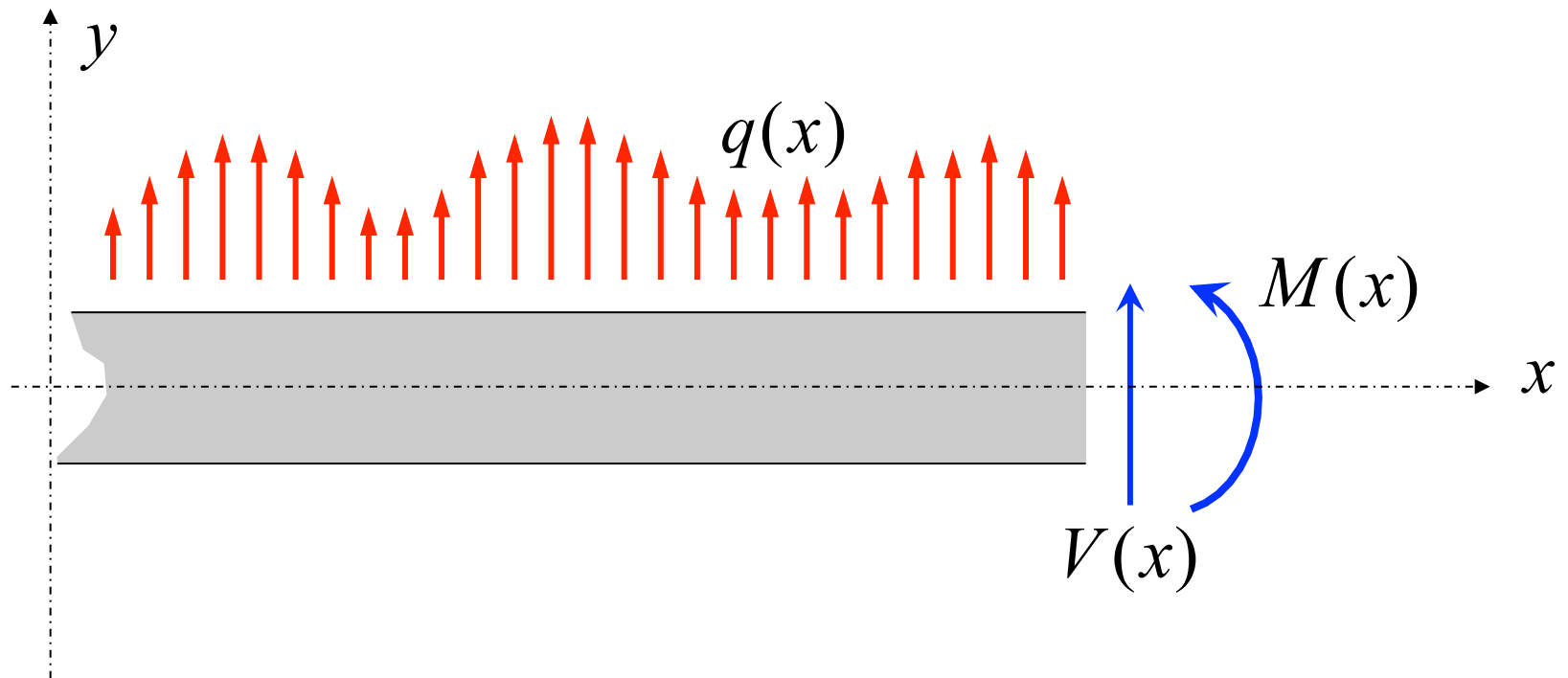


$$[\sigma(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(y) = -y \frac{M}{I}$$

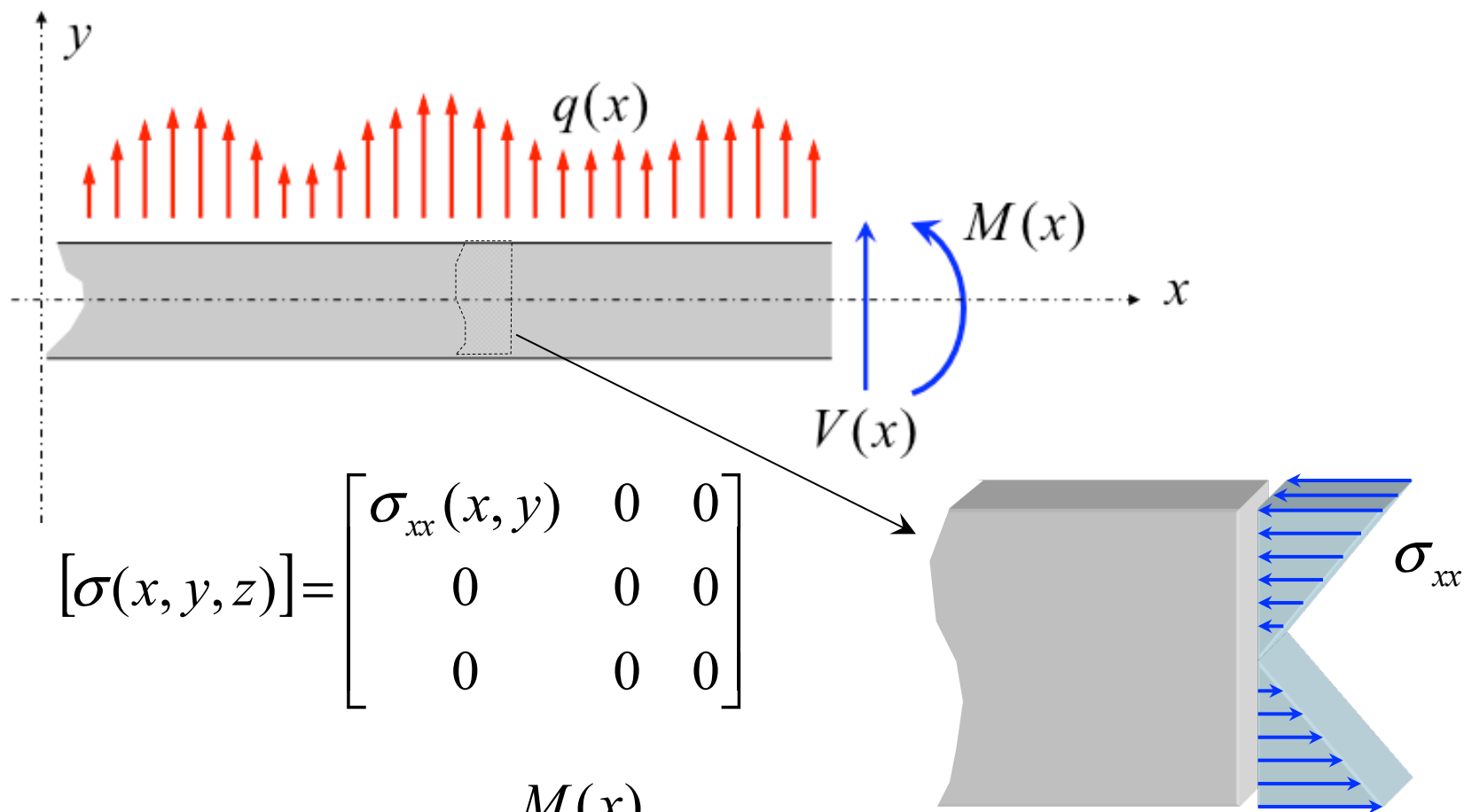


Tensões normais e cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão



Tensões de Flexão em Barras (vigas)

Tensões Normais de Flexão Devido ao Momento Fletor

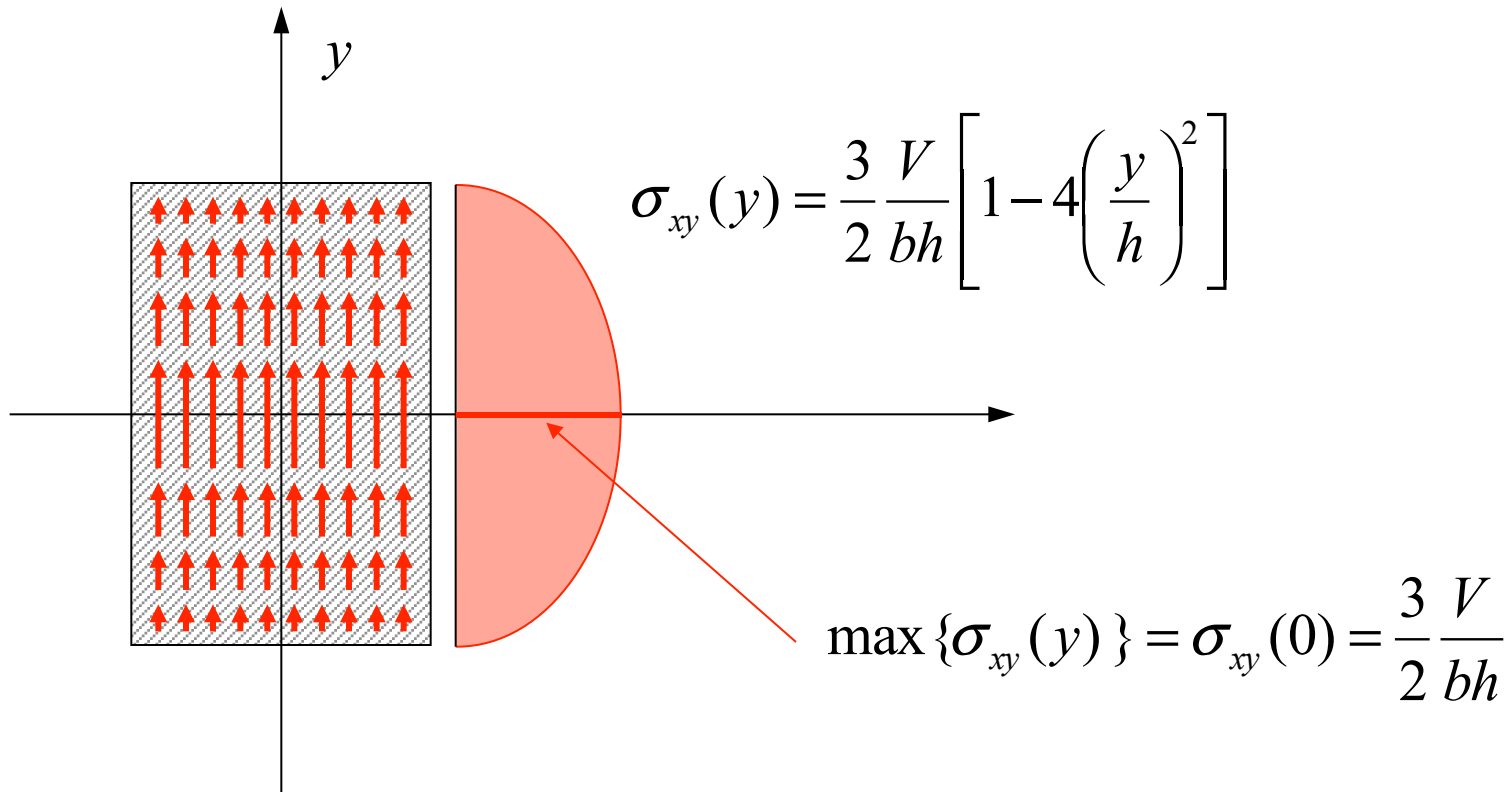


$$[\sigma(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = -y \frac{M(x)}{I}$$

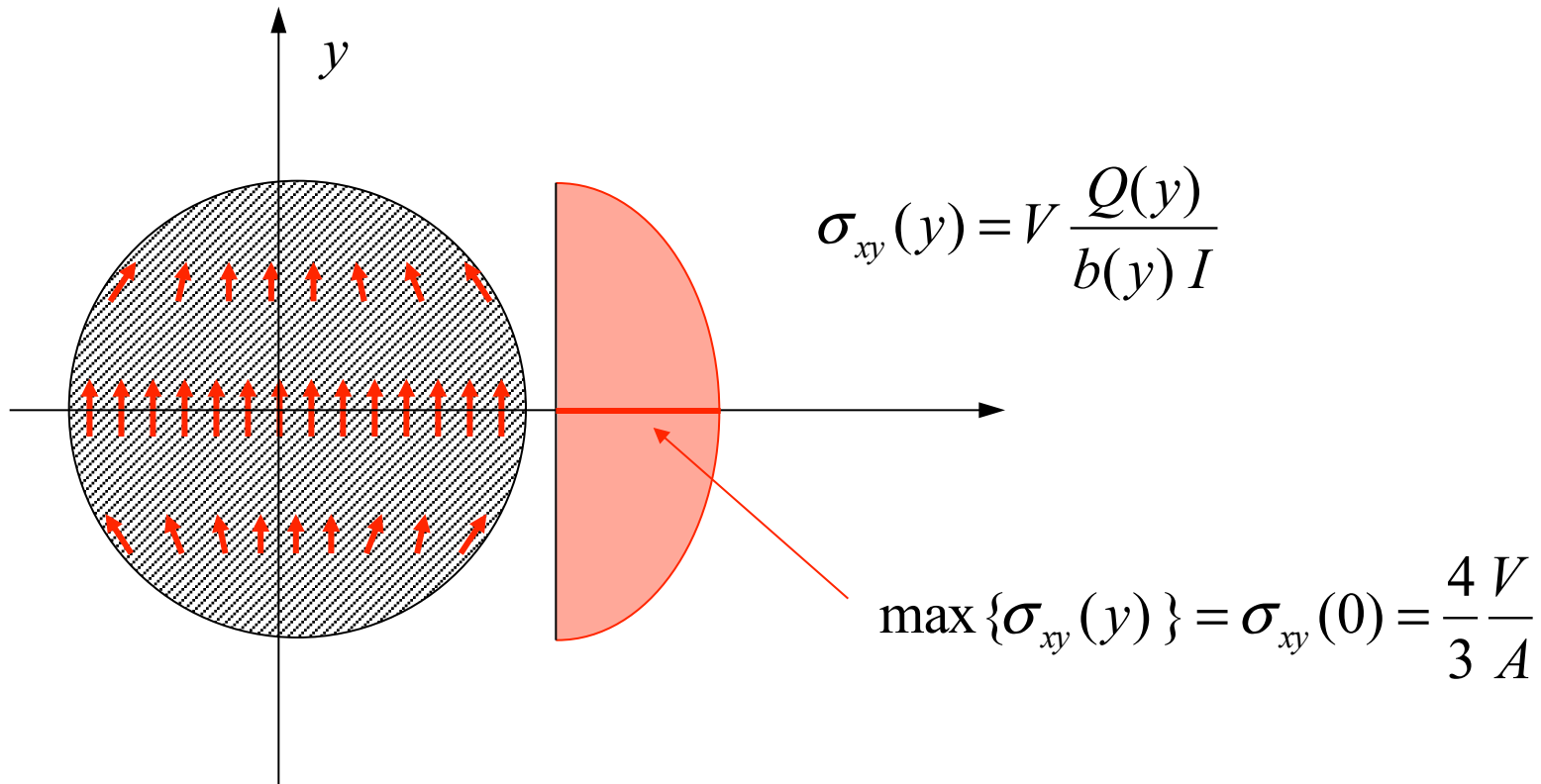
Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão – Esforço Cortante

Viga de seção retangular:



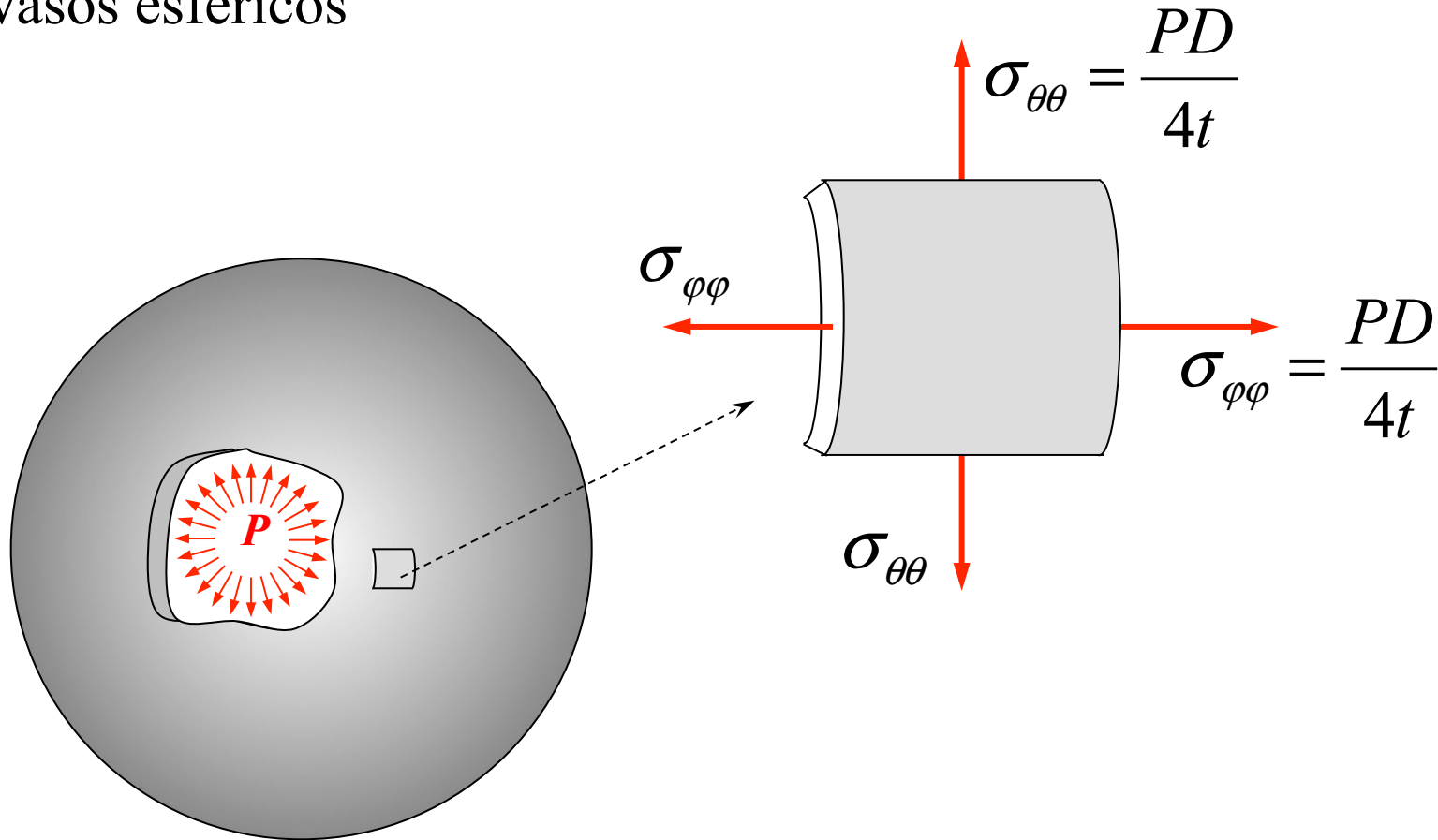
Tensões cisalhantes em vigas sob carregamentos de flexão – Esforço Cortante

Viga de seção Circular:



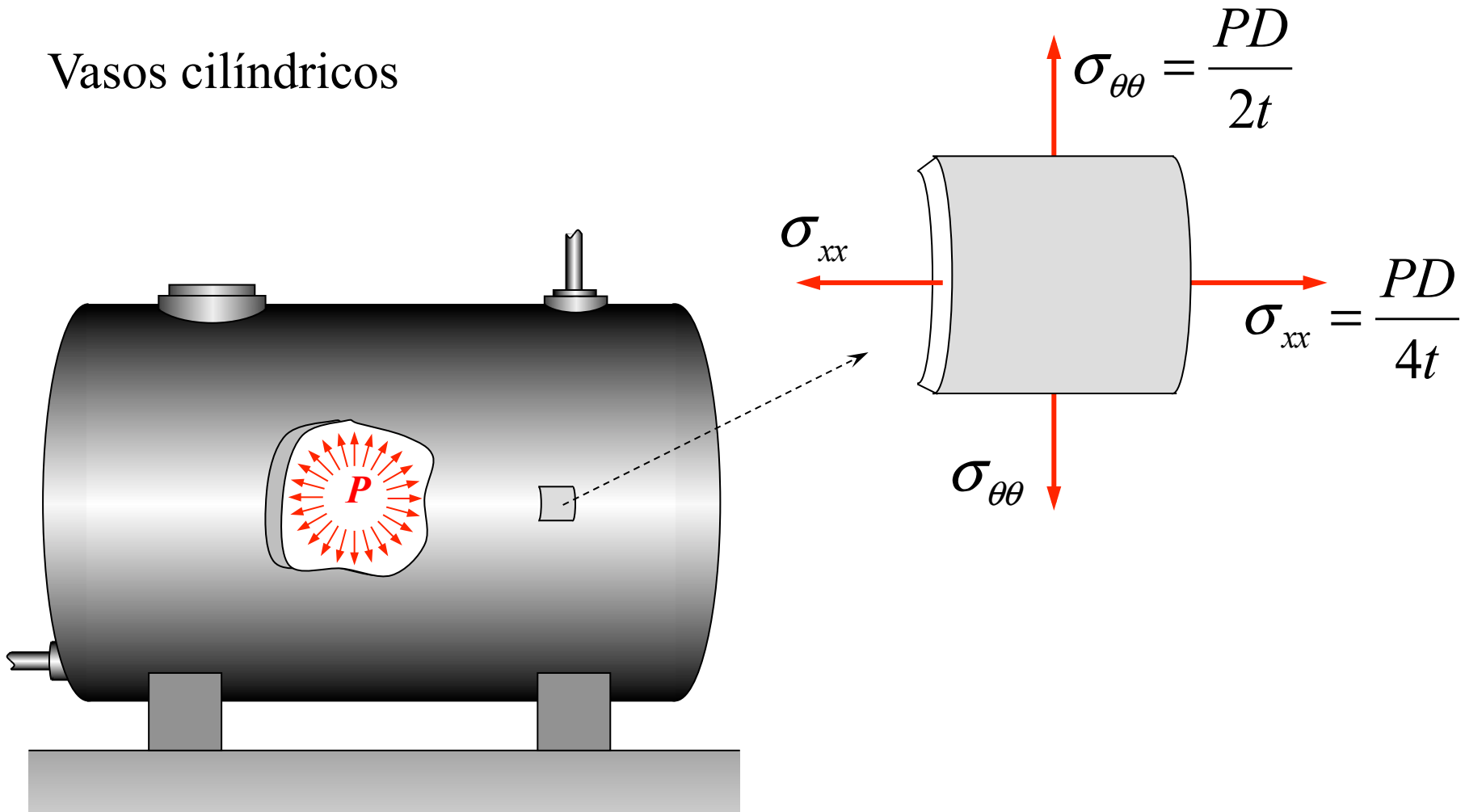
Vasos de Pressão de Paredes Finas ($D \gg t$)

Vasos esféricos



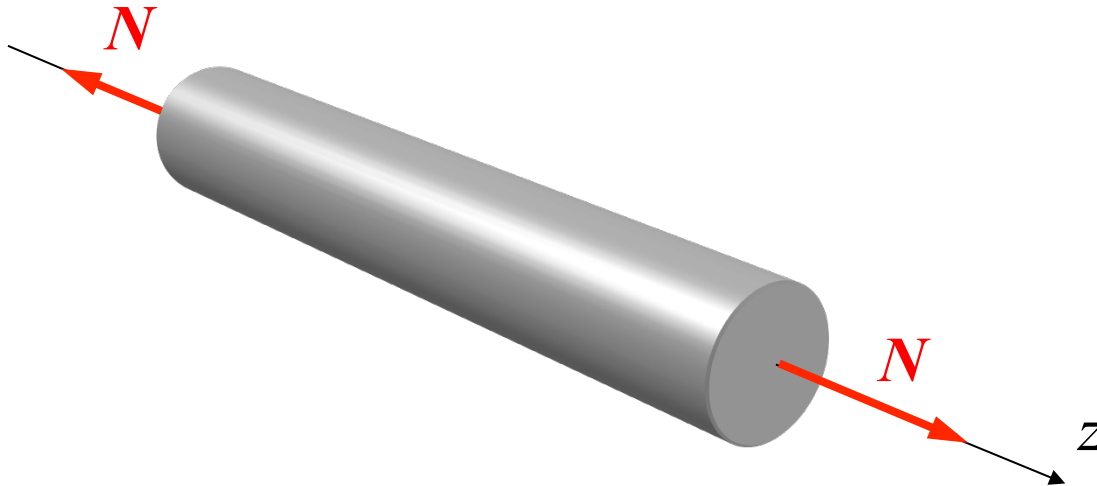
Vasos de Pressão de Paredes Finas ($D \gg t$)

Vasos cilíndricos

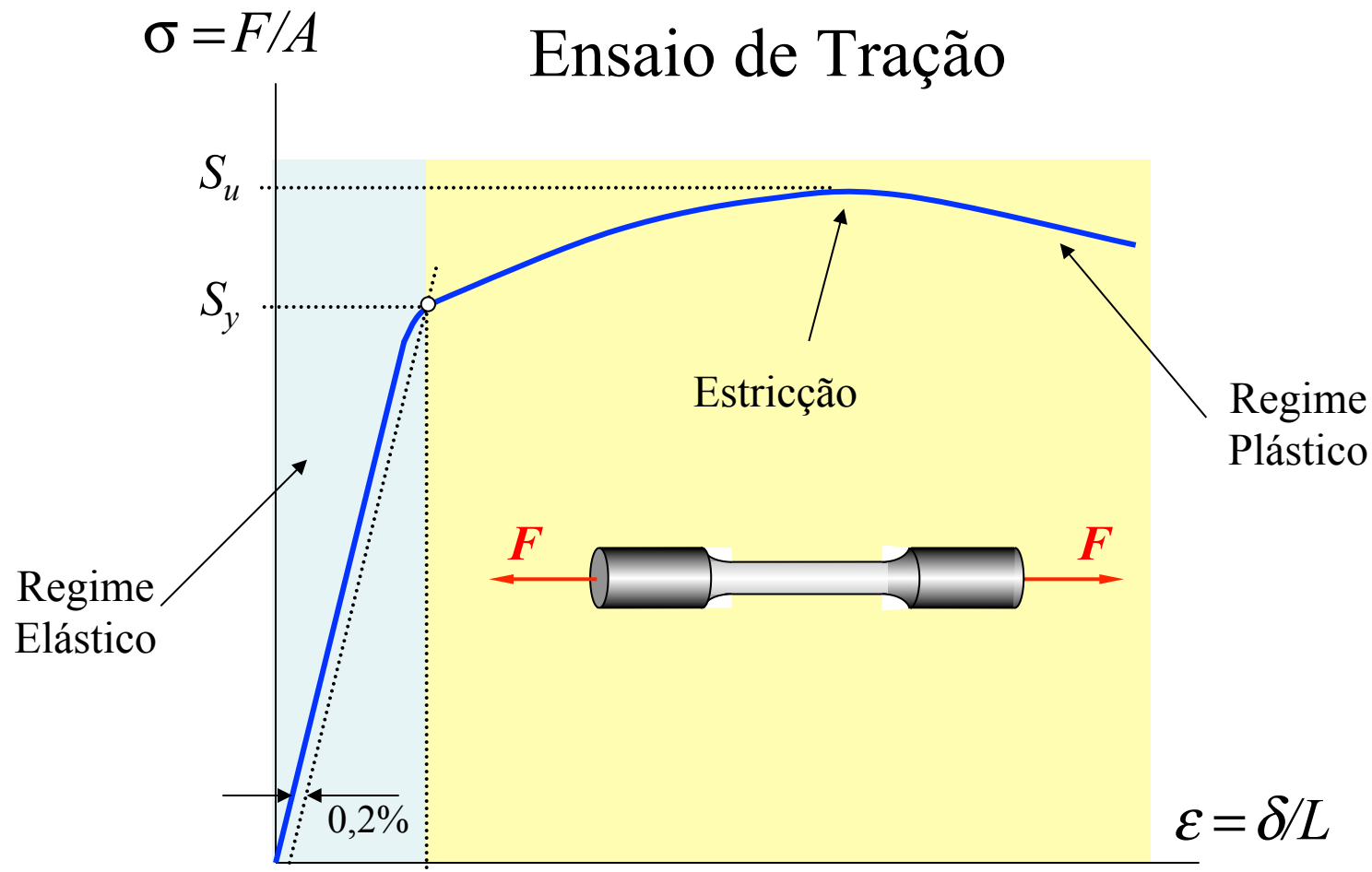


Exercício

Uma barra de perfil circular deve suportar um carregamento axial $N = 50 \text{ kN}$. No projeto será utilizado um perfil laminado de aço SAE 1020, com limite de escoamento $S_y = 210 \text{ MPa}$. Deve ser utilizado um coeficiente de segurança $n_s = 2,0$ no projeto contra a falha por escoamento do material. Determinar qual o diâmetro mínimo para a barra.

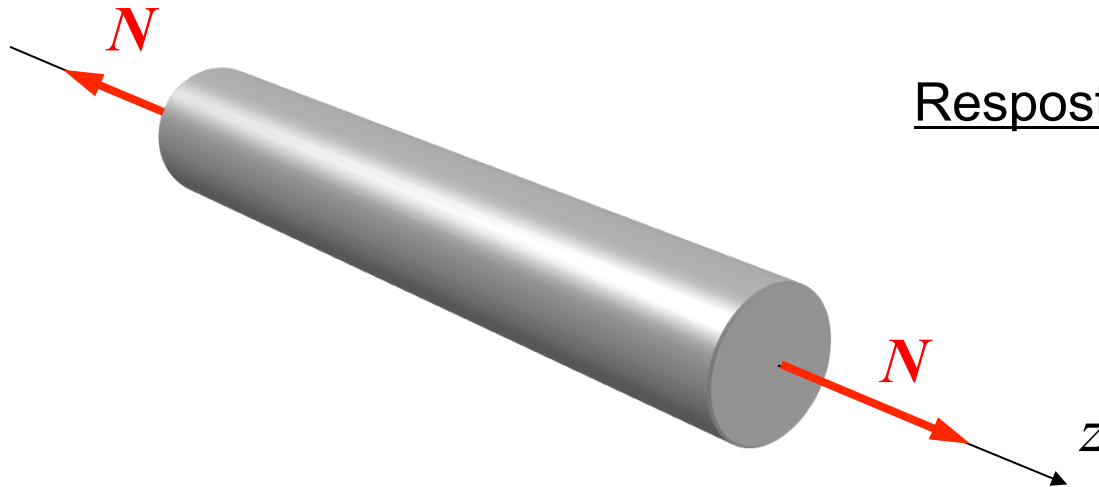


Carregamentos e Deformações Uniaxiais



Exercício (continuação)

Uma barra de perfil circular deve suportar um carregamento axial $N = 50 \text{ kN}$. No projeto será utilizado um perfil laminado de aço SAE 1020, com limite de escoamento $S_y = 210 \text{ MPa}$. Deve ser utilizado um coeficiente de segurança $n_s = 2,0$ no projeto contra a falha por escoamento do material. Determinar qual o diâmetro mínimo para a barra.

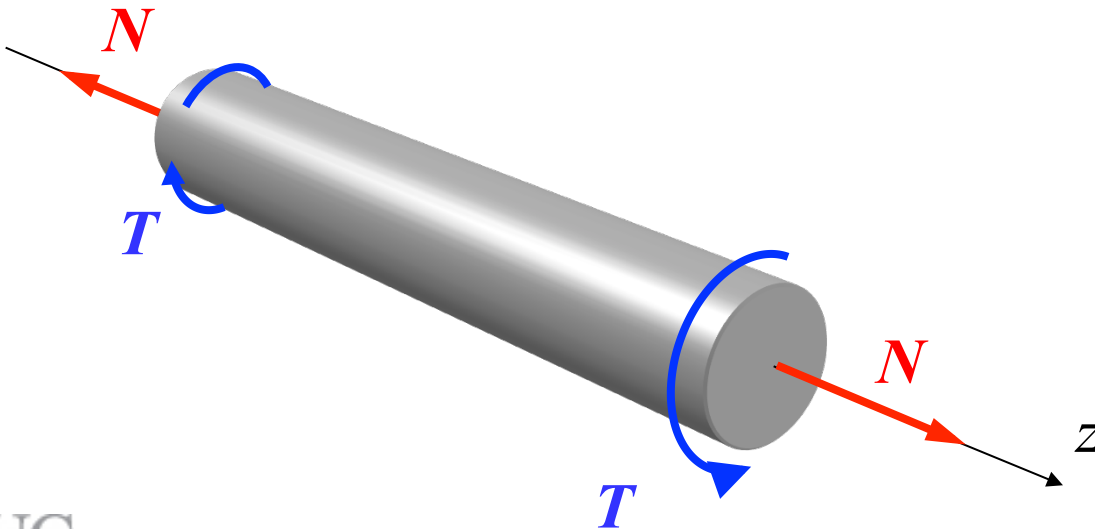


Resposta: $D > 24,6 \text{ mm}$

Exercício (continuação)

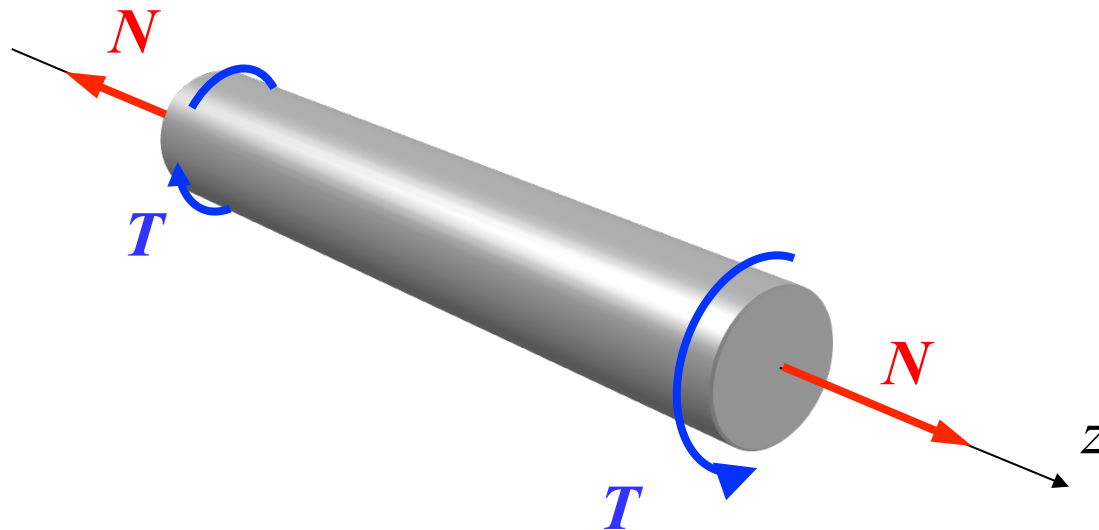
Escolhemos uma barra com diâmetro $D = 25,4$ mm.

Além do esforço axial de 50 kN, esta barra seria capaz de suportar simultaneamente um torque? De qual valor? Para responder considere $S_y = 210$ Mpa e um coeficiente de segurança $n_s = 2,0$.



Determinação da Distribuição de Tensão no Corpo Sujeito à Ação de Forças Externas

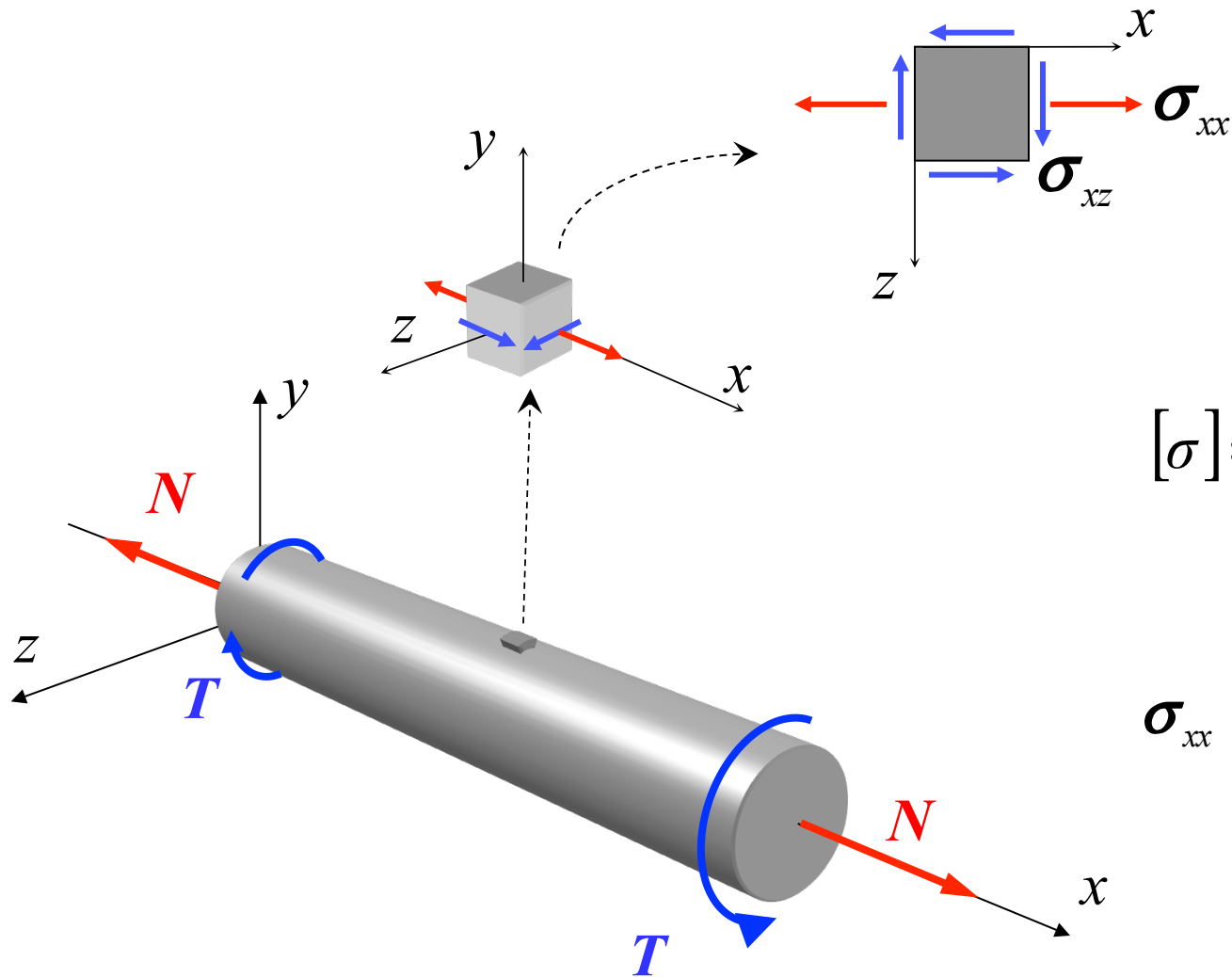
Carregamento combinado: Força Axial e Torção



Força Axial e Torção

- Hipóteses
 - Pequenas Deformações
 - Comportamento Elástico Linear
- Sob estas hipóteses, pode-se aplicar o princípio da superposição
- Os estados de tensão resultantes de cada um dos carregamentos são calculados independentemente e somados.

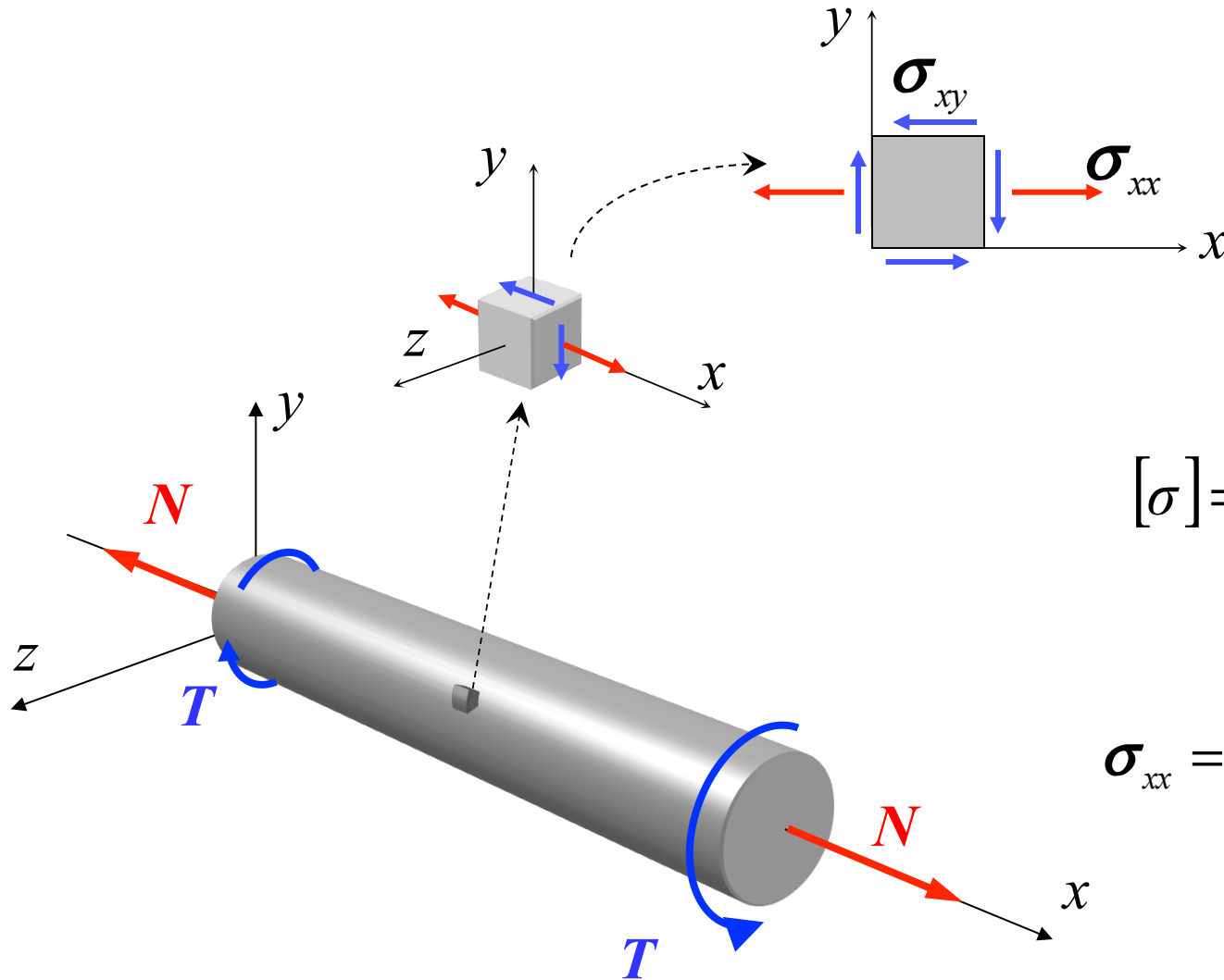
Força Axial e Torção



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad \text{e} \quad \sigma_{xz} = \frac{TD}{2J}$$

Força Axial e Torção

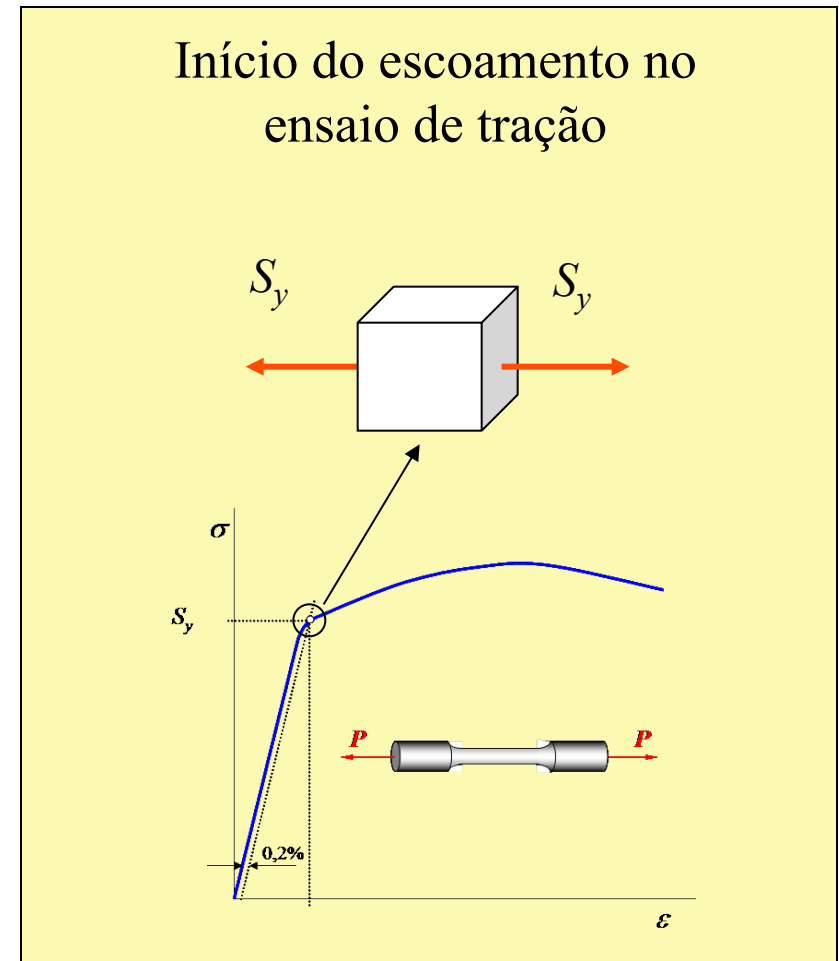
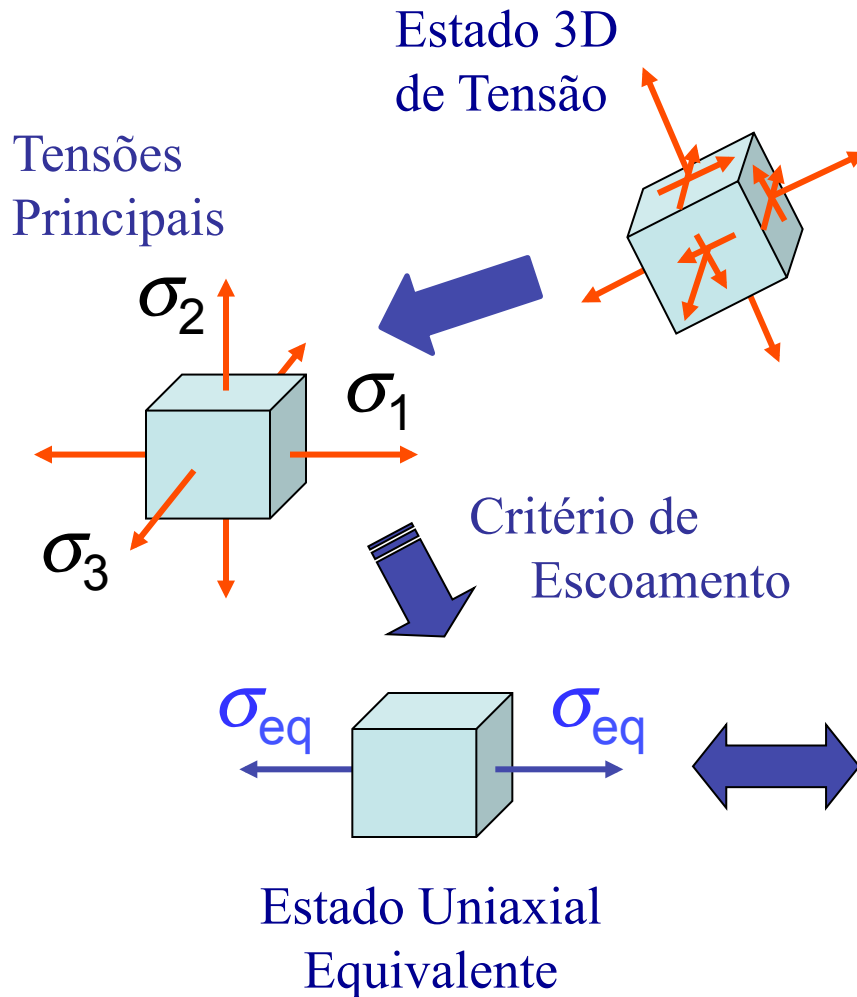


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

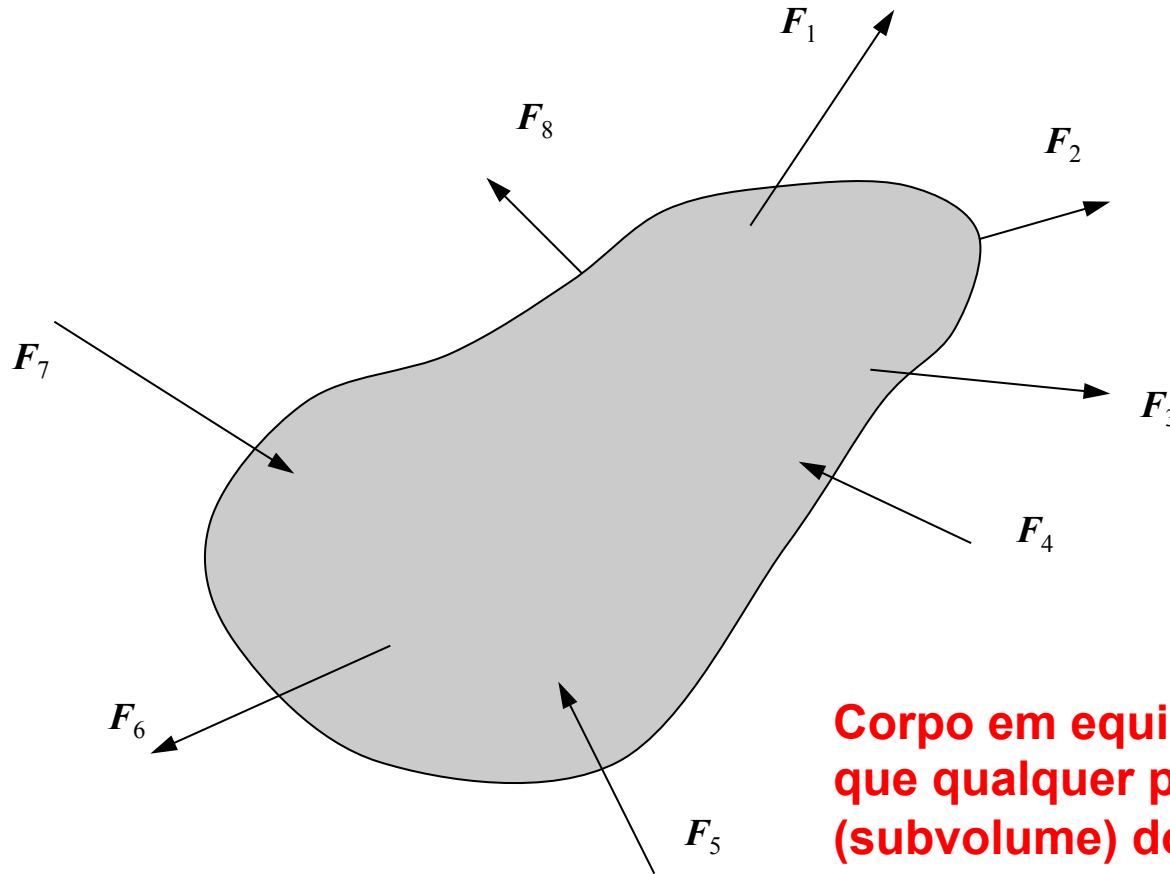
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad \text{e} \quad \sigma_{xy} = -\frac{TD}{2J}$$

Tensões Principais

Aplicação: Critérios de Falha

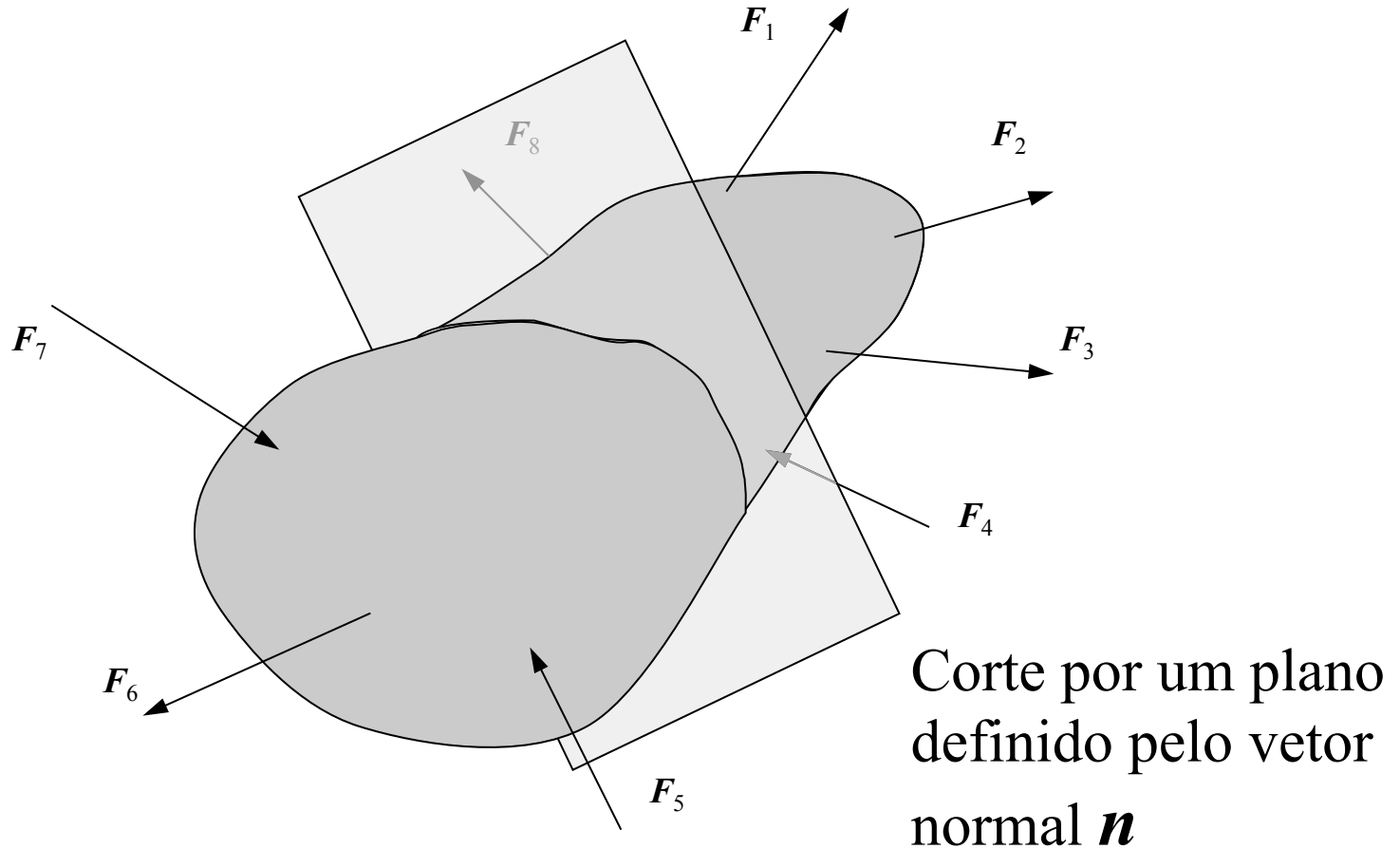


Corpo em equilíbrio sujeito à ação de um conjunto de forças externas

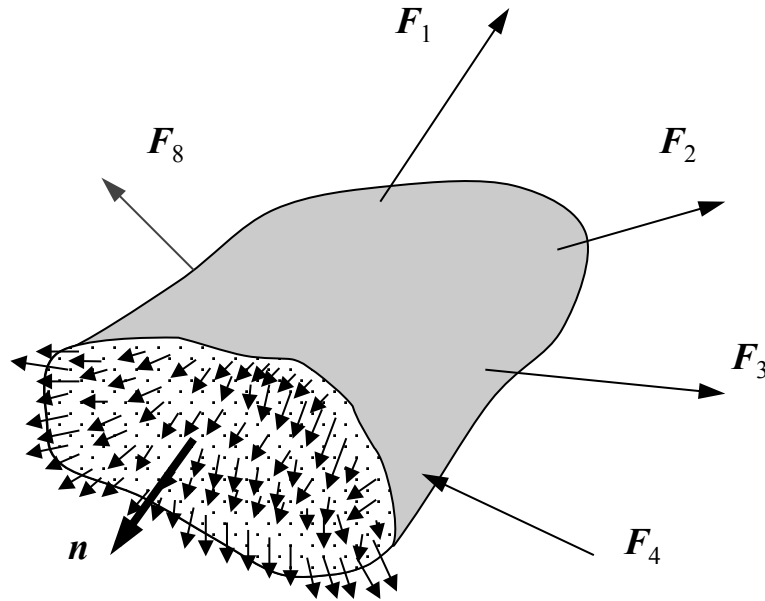


Corpo em equilíbrio significa que qualquer parte (subvolume) do corpo deve também estar em equilíbrio

Corpo em equilíbrio sujeito à ação de um conjunto de forças externas

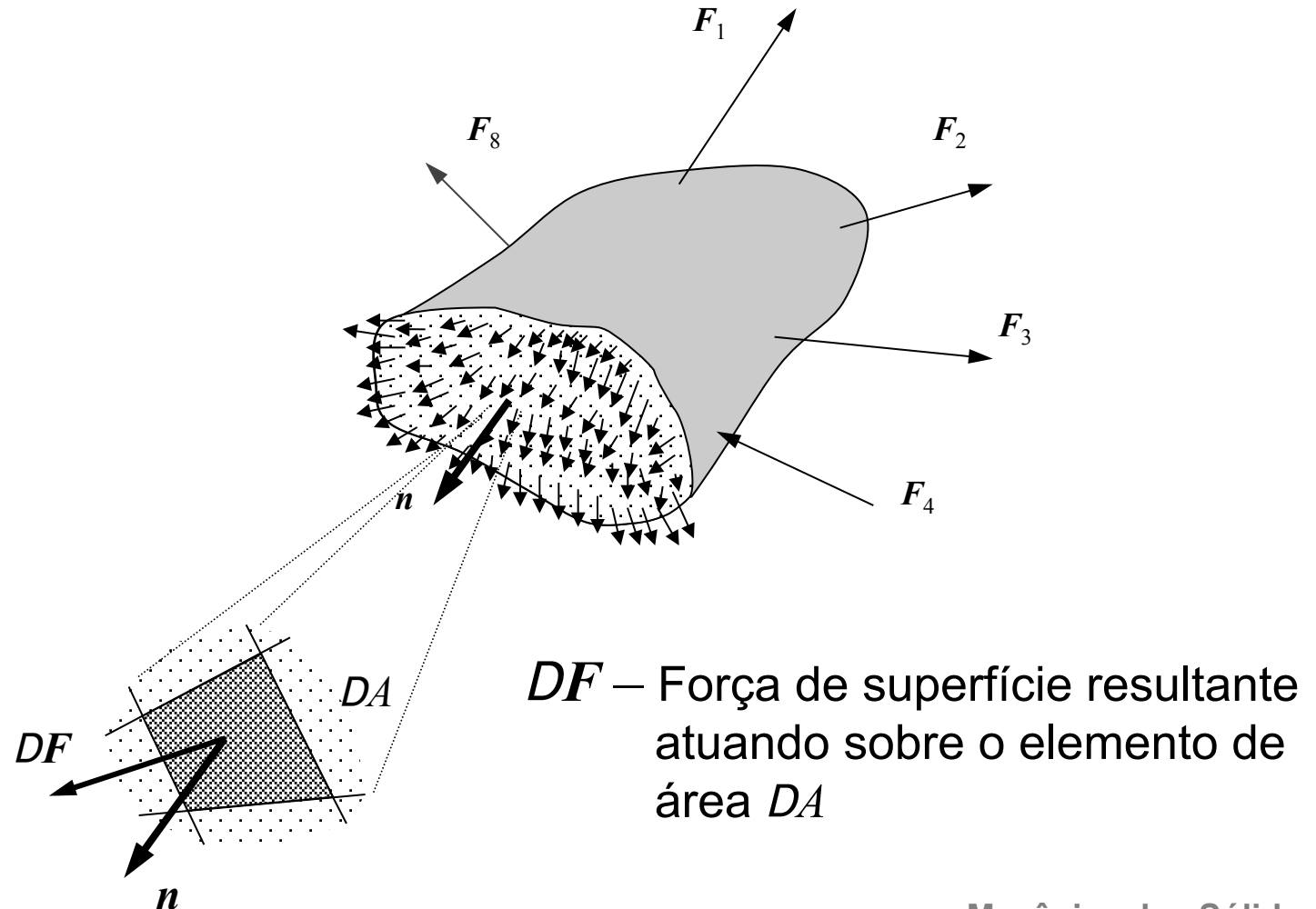


Corpo em equilíbrio sujeito à ação de um conjunto de forças externas

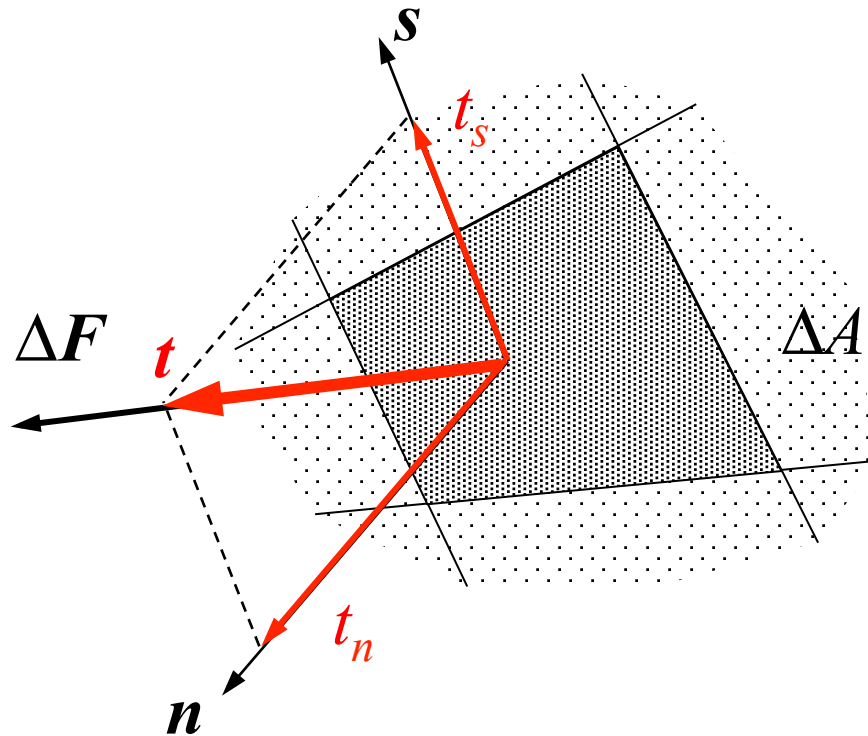


Forças internas de ligação (forças de superfície)
mantêm as duas partes do corpo em equilíbrio

Corpo em equilíbrio sujeito à ação de um conjunto de forças externas



Definição do *Vetor Tensão*



Vetor tensão

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$$

Componente normal
(tensão normal)

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$$

Componente tangencial
(tensão cisalhante)

$$t_s = |\mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|$$

Estado de Tensão em um Ponto

O *vetor tensão* associado à direção cuja normal é $\mathbf{n}$, pode então ser calculado a partir do *tensor de tensões*:

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_y^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

em notações mais concisas:

$$\{t^{(n)}\} = [\sigma]\{n\} \quad \text{ou} \quad \mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Tensões Principais e Planos Principais

Dado o estado de tensão num ponto, os planos principais são definidos como aqueles planos onde a componente tangencial (cisalhante) do vetor tensão é nula

A equação abaixo relaciona o vetor tensão atuando sobre um plano definido pela norma $\mathbf{n}$ com o tensor de tensões:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

ou, em forma matricial:

$$\{t^{(n)}\} = [\sigma] \{n\}$$

Tensões Principais e Planos Principais

Deseja-se determinar os planos definidos pelas suas normais $\mathbf{n}$, tais que os vetores tensão atuando sobre eles têm a forma:

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lambda \mathbf{n}$$

Substituindo-se esta expressão na equação da tela anterior, obtém-se: $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$

ou em forma matricial:

$$[\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\} = \lambda \{\mathbf{n}\}$$

Tensões Principais e Planos Principais

Portanto, a determinação dos planos principais fica reduzida à solução de um problema de autovalores:

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n}$$

- Os autovetores do tensor de tensão definem os planos (direções) principais.
- Os autovalores do tensor de tensão, λ , são as **tensões principais**.

Tensões Principais e Planos Principais

Exemplo: Considere o estado de tensão dado pelo tensor:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 10 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \quad (\text{em MPa})$$

As componentes do tensor referem-se a uma base Cartesiana.

Seus autovalores são obtidos resolvendo-se a equação:

$$\det \begin{bmatrix} 50 - \lambda & 10 & 0 \\ 10 & 50 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 50 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Tensões Principais e Planos Principais

Expandindo-se este determinante, obtém-se a equação:

$$(\lambda^2 - 100\lambda + 2400)(50 - \lambda) = 0$$

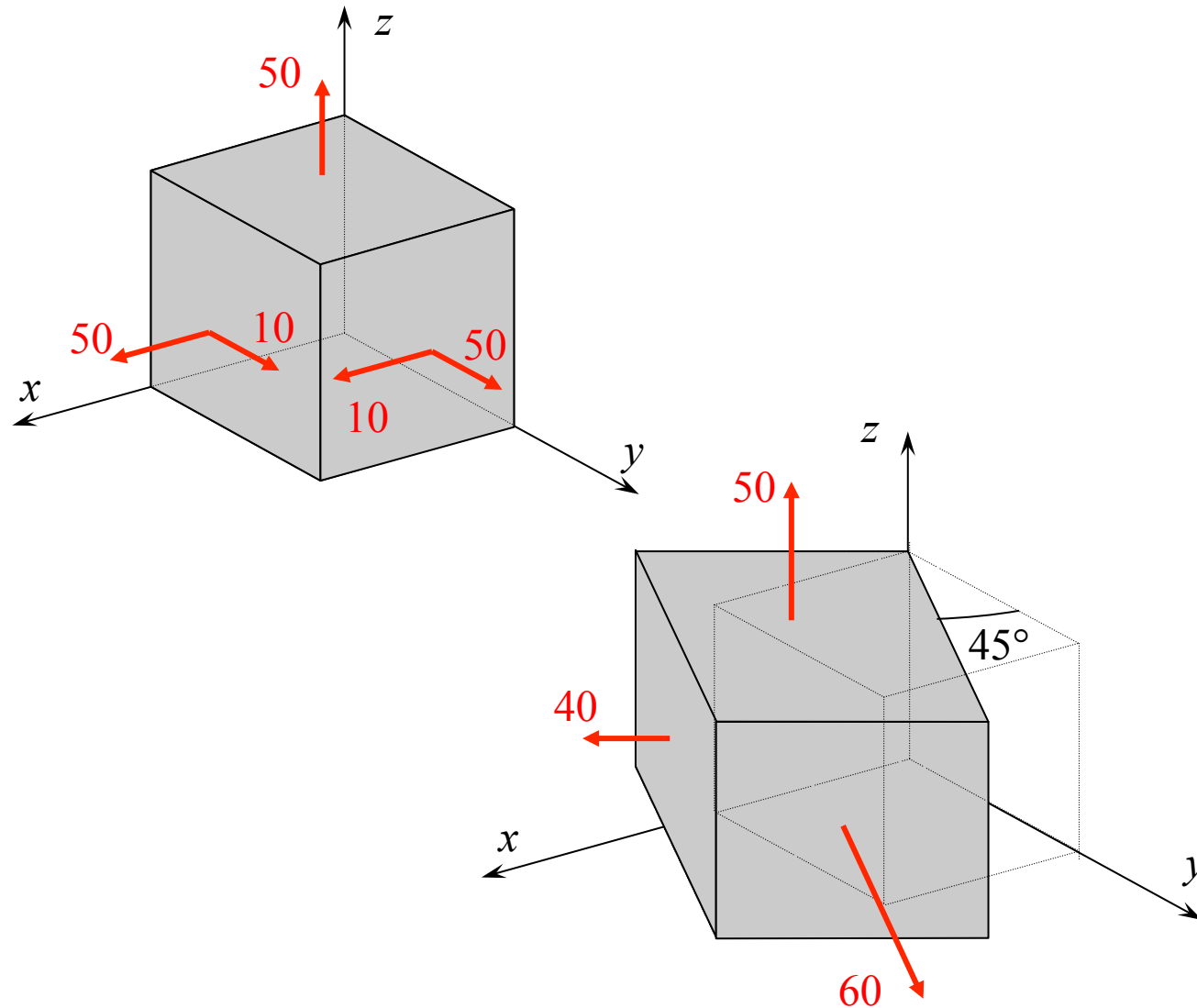
Cujas raízes são:

$$\lambda_1 = 60 \text{ MPa}, \quad \lambda_2 = 50 \text{ MPa}, \text{ e } \quad \lambda_3 = 40 \text{ MPa}$$

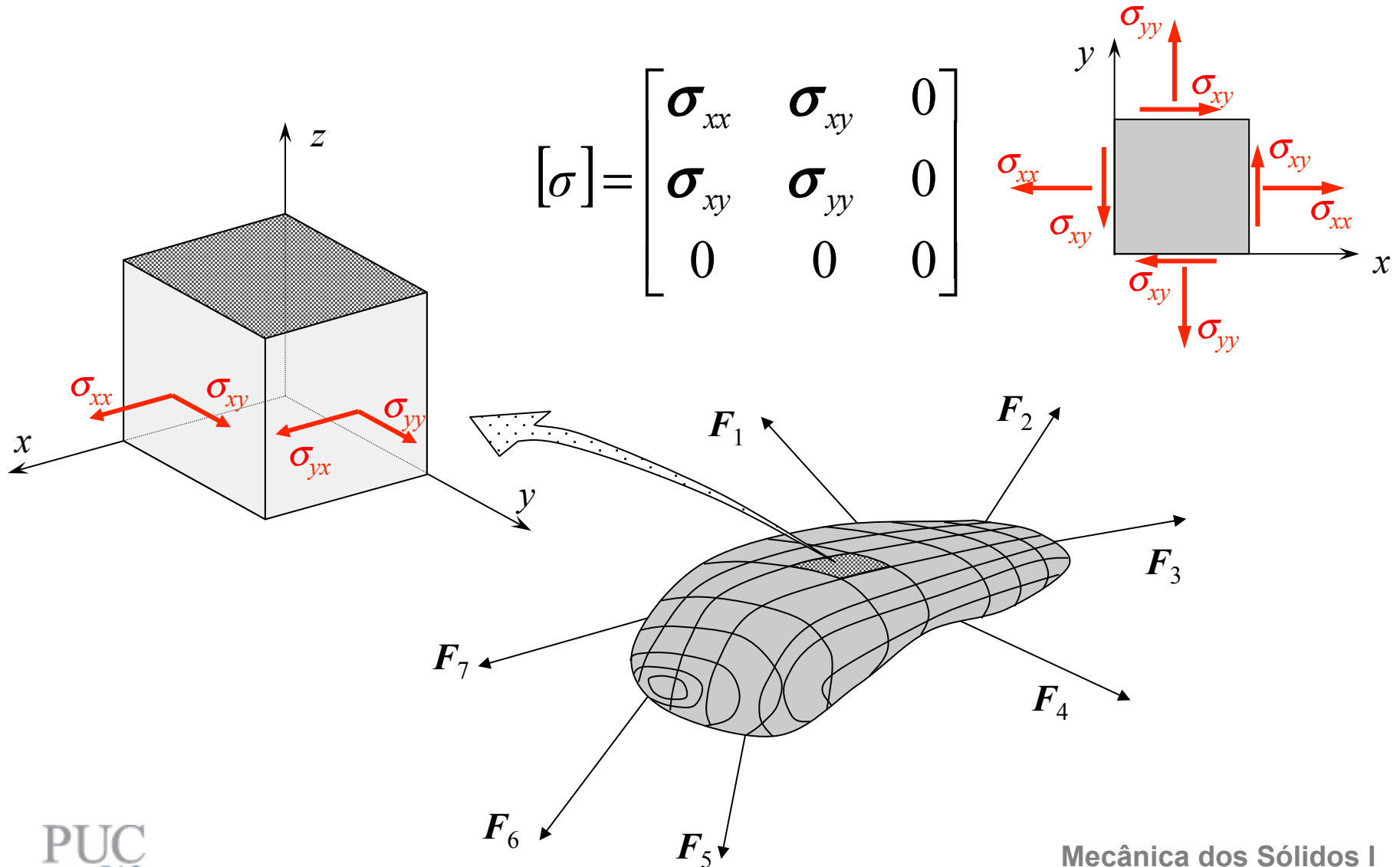
Mostra-se ainda que as direções (planos) principais são definidas pelos autovetores (unitários e ortogonais)

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{k}, \text{ e } \quad \mathbf{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}$$

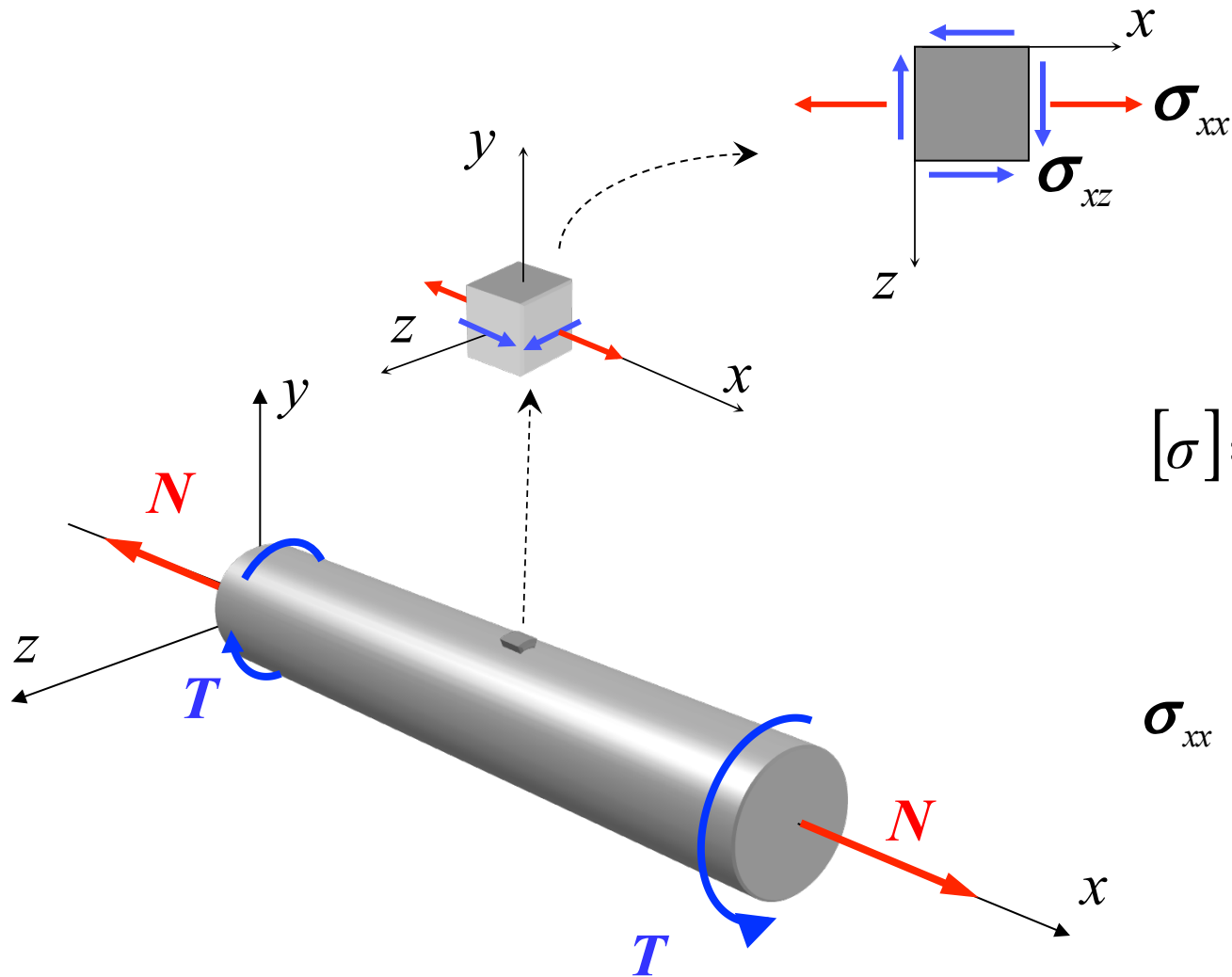
Tensões Principais e Planos Principais



Estado Plano de Tensão



Estado Plano de Tensão: *Força Axial e Torção*

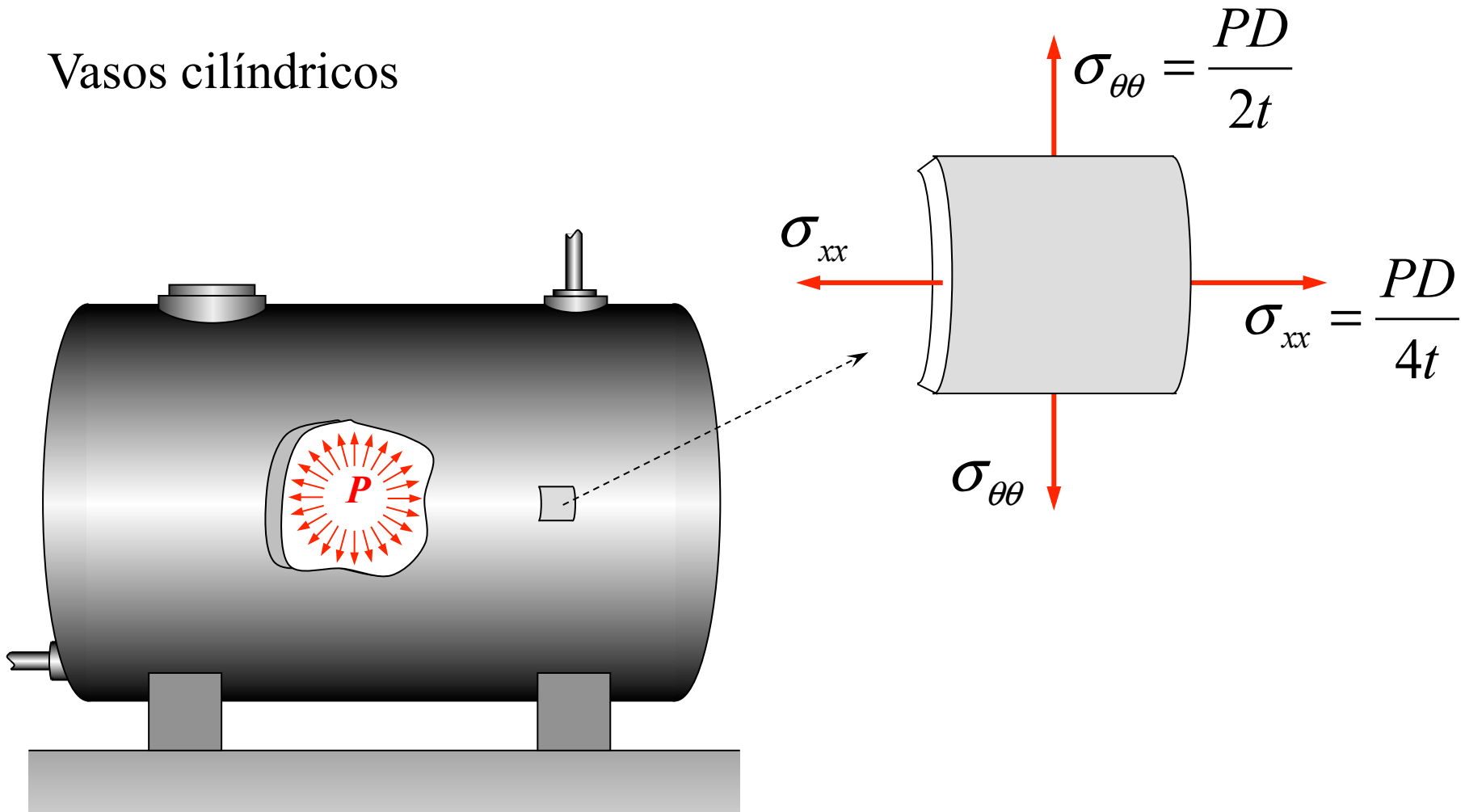


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad \text{e} \quad \sigma_{xz} = \frac{TD}{2J}$$

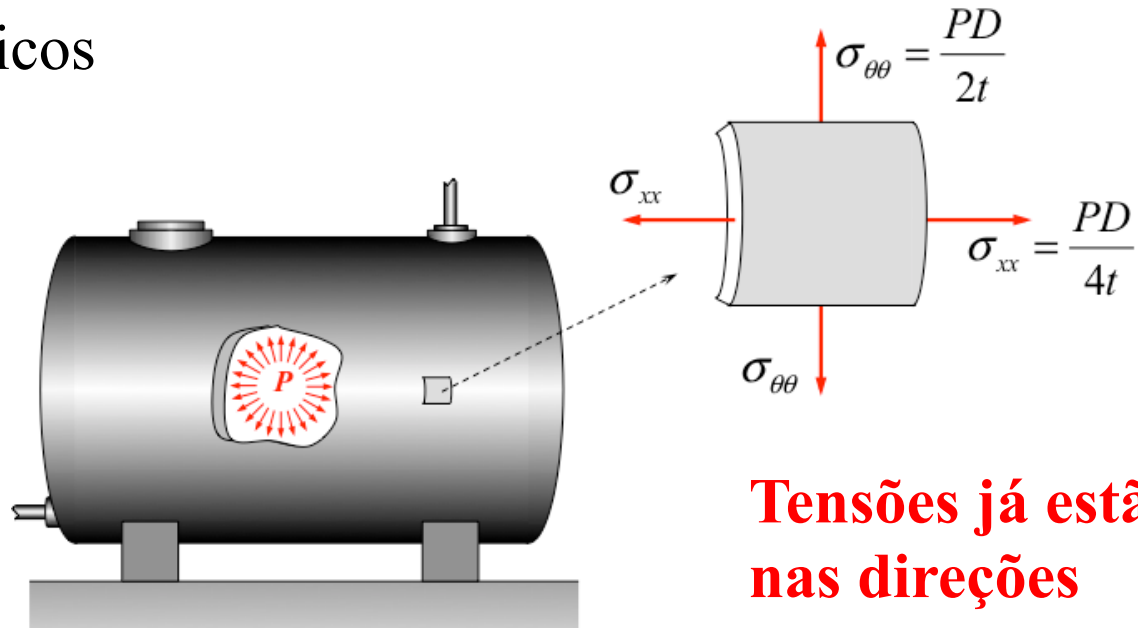
Vasos de Pressão de Paredes Finas ($D \gg t$)

Vasos cilíndricos



Vasos de Pressão de Paredes Finas ($D \gg t$)

Vasos cilíndricos

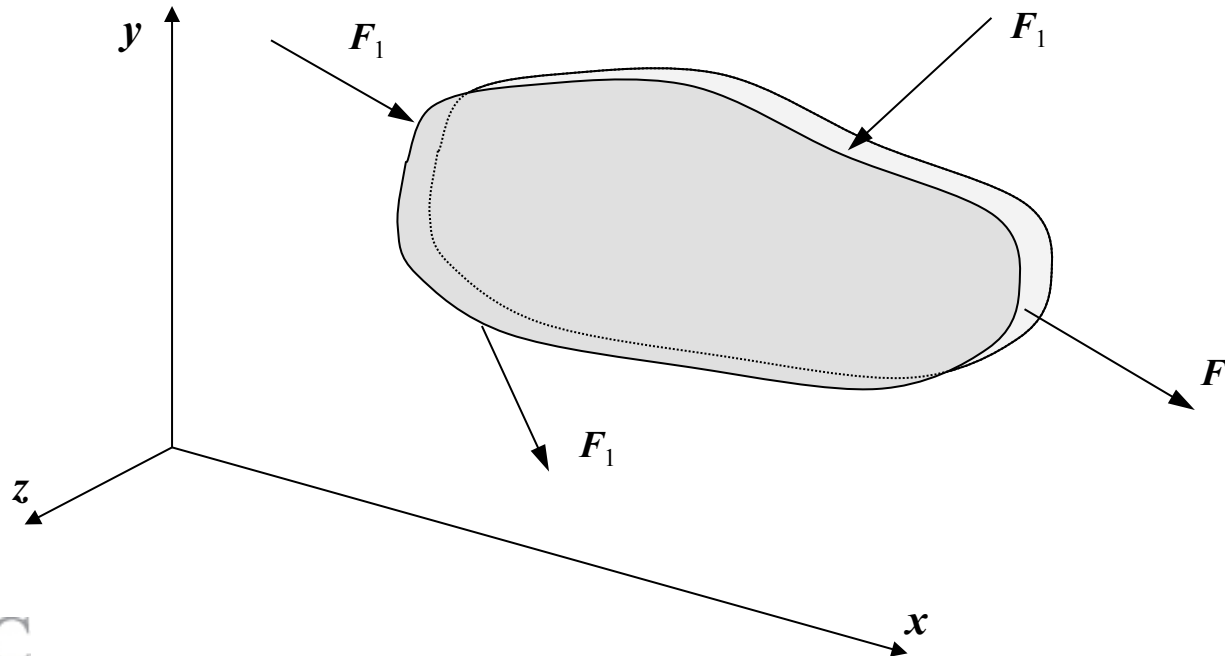


**Tensões já estão
nas direções
principais!**

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & PD/4t & 0 \\ 0 & 0 & PD/2t \end{bmatrix}$$

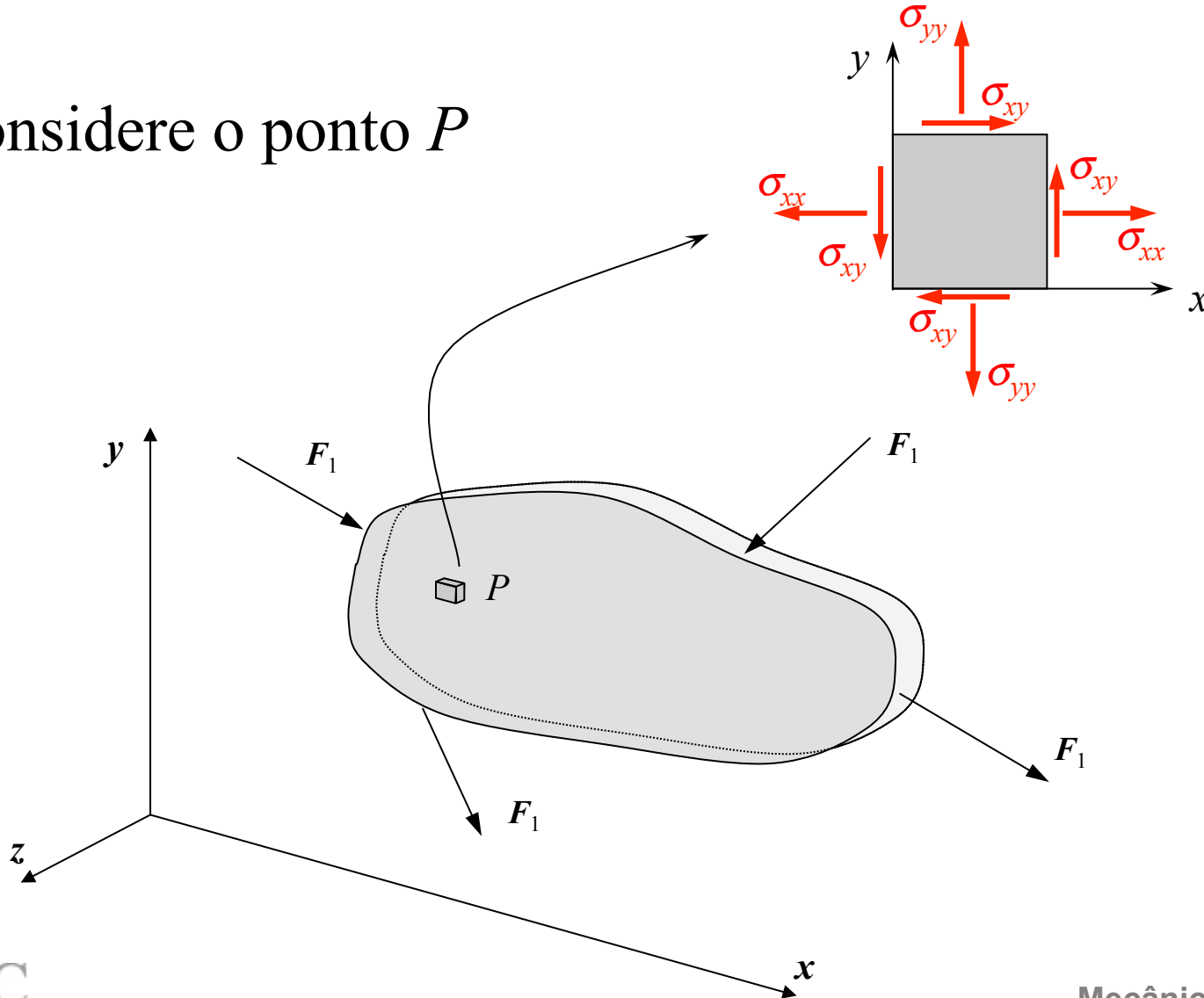
Estado Plano de Tensão

Conhecidas as componentes do tensor de tensões num ponto onde o estado de tensão é plano, determinar o *vetor tensão* em planos arbitrários



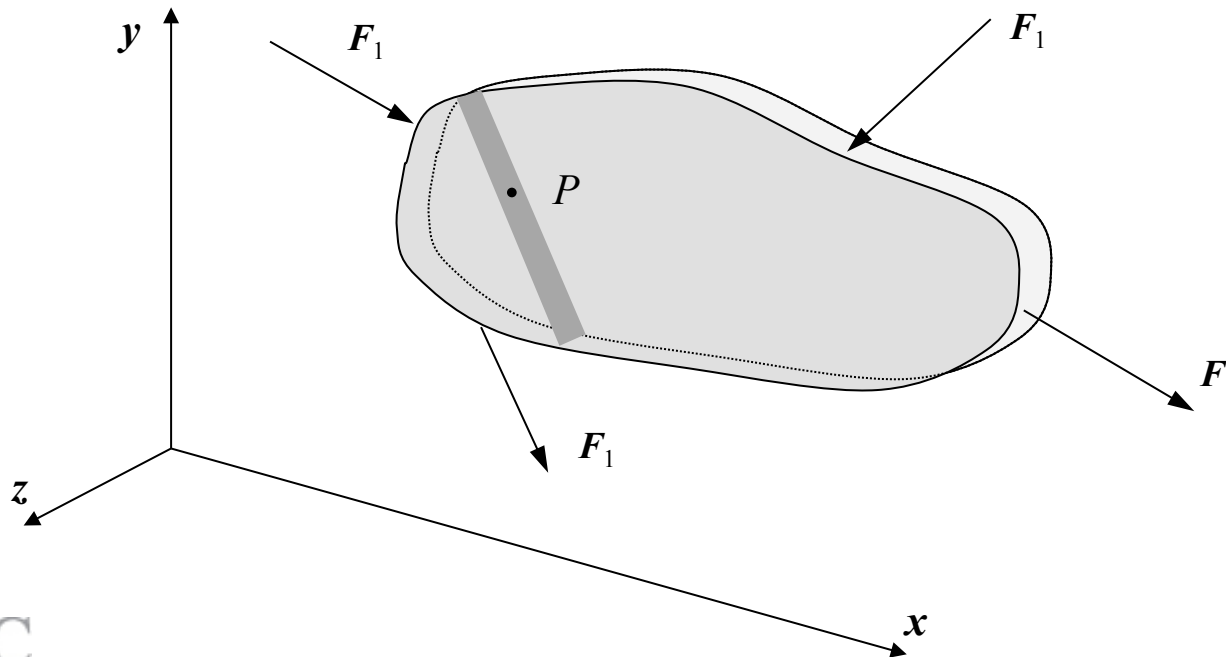
Estado Plano de Tensão

Considere o ponto P



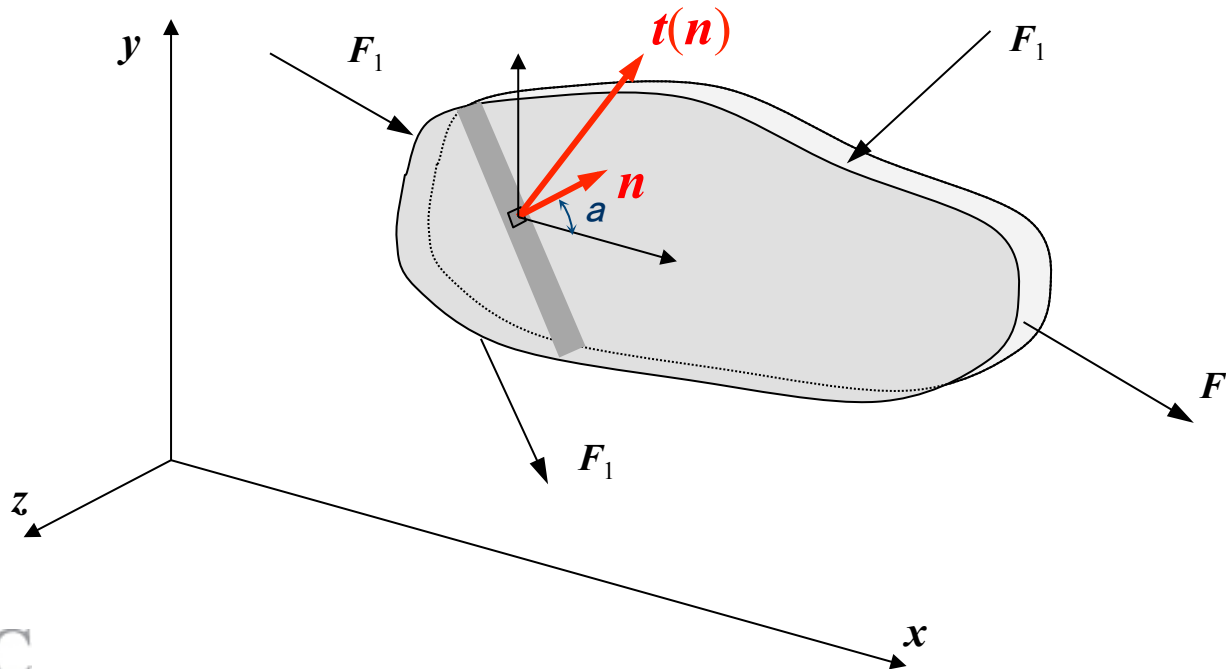
Estado Plano de Tensão

Considere um plano passando pelo ponto P

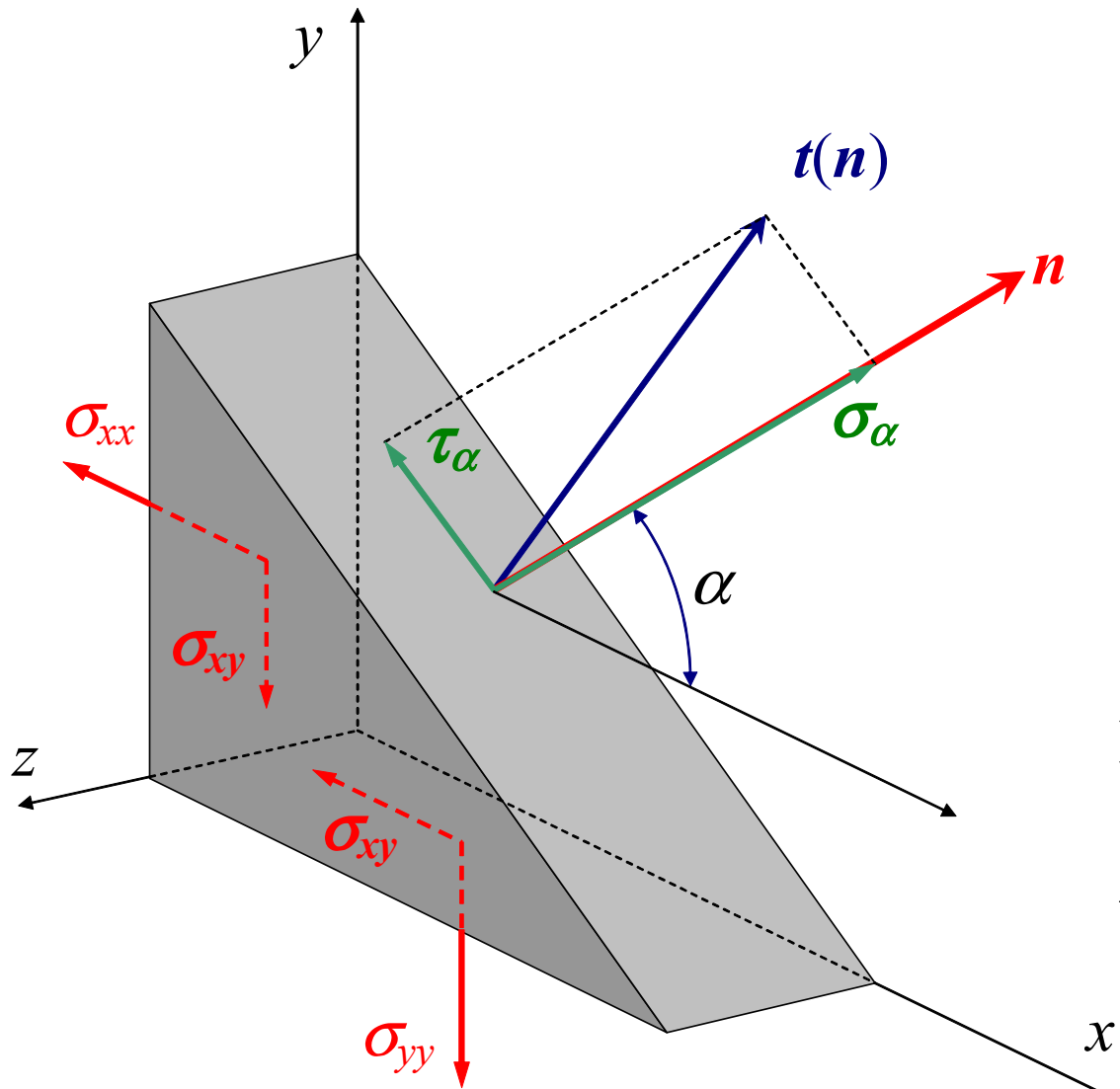


Estado Plano de Tensão

O plano é determinado pela normal $\mathbf{n}$ que faz um ângulo a com o eixo x



Estado Plano de Tensão

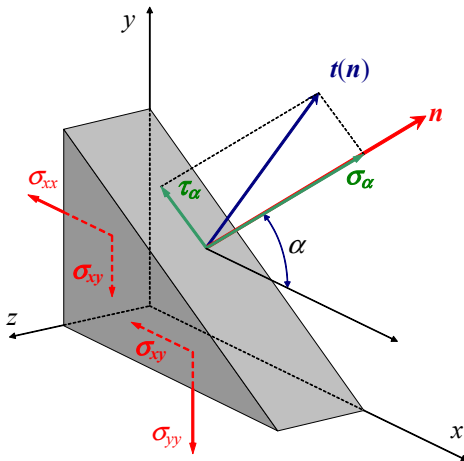


$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deseja-se determinar σ_{α} e τ_{α} em função das tensões σ_{xx} , σ_{xy} e σ_{yy}

Estado Plano de Tensão

Impondo-se o equilíbrio de forças nas duas direções obtém-se:



$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha$$

Estado Plano de Tensão

O mesmo resultado é obtido considerando-se

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{t(\alpha)\} = [\sigma]\{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{\alpha} = \{t(\alpha)\}^T \{n\}$$

$$\tau_{\alpha} = \|\{t(\alpha)\} - \sigma_{\alpha} \{n\}\|$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

Problema: Determinar as direções dos planos, determinados pelos ângulos α , onde ocorrem os valores máximo e mínimo de σ_α

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\alpha + 2\sigma_{xy}\cos 2\alpha = 2\tau_\alpha$$

logo $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \tau_\alpha = 0$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha + 2\sigma_{xy} \cos 2\alpha = 0$$



$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

logo

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

As tensões e direções principais são dadas pelas expressões:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{I,II} = \sigma_m \pm R$$

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

As tensões e direções principais podem também ser obtidas a partir de um problema de autovalor:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = -\sigma(\sigma^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)) = 0$$

$$\sigma_I = \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{II} = \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{III} = 0$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

$$\sigma_I = \sigma_m + R > \sigma_{II} = \sigma_m - R$$

$\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$	σ_{xy}	$\tan(2\alpha_p)$	α_p	$\sigma_\alpha(\alpha_p)$	$\sigma_\alpha(\alpha_p + \pi/2)$
+	+	+	$0 < \alpha_p < \pi/4$	σ_I	σ_{II}
-	-	+	$0 < \alpha_p < \pi/4$	σ_{II}	σ_I
+	-	-	$-\pi/4 < \alpha_p < 0$	σ_I	σ_{II}
-	+	-	$-\pi/4 < \alpha_p < 0$	σ_{II}	σ_I

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

Alternativa:

i. Dados $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$

ii. $\alpha_p = \frac{1}{2} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$

iii. $\sigma_{\alpha}(\alpha_p) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\alpha_p) + \sigma_{xy} \sin(2\alpha_p)$

$$\sigma_{\alpha}(\alpha_p + \pi/2) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\alpha_p) - \sigma_{xy} \sin(2\alpha_p)$$

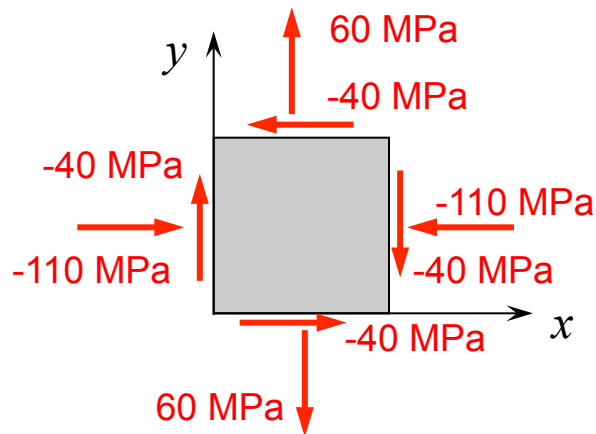
iv. $\sigma_I = \max \{ \sigma_{\alpha}(\alpha_p), \sigma_{\alpha}(\alpha_p + \pi/2) \}$

$$\sigma_{II} = \min \{ \sigma_{\alpha}(\alpha_p), \sigma_{\alpha}(\alpha_p + \pi/2) \}$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

Ex: Determinar tensões e direções principais



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -110 & -40 & 0 \\ -40 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{em MPa})$$

Estado Plano de Tensão

Tensões e direções principais

Ex: Determinar tensões e direções principais (cont.)

$$\sigma_{xx} = -110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = -40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 60 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = -25 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = 93,9 \text{ MPa}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \text{Tan}^{-1}\left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\right) = 12,6^\circ$$

Estado Plano de Tensão

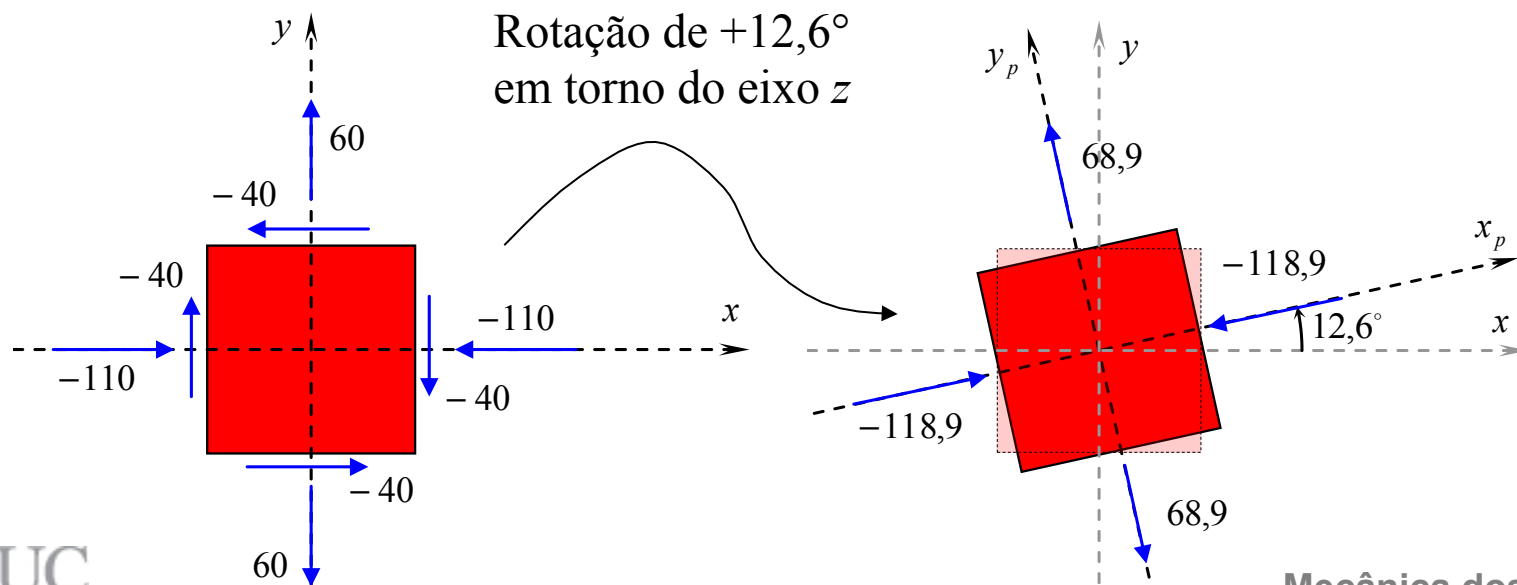
Tensões e direções principais

Ex: Determinar tensões e direções principais (cont.)

Considerando a tabela do *Slide 43*:

$$\sigma_I = \sigma_\alpha(\alpha_p + \pi/2) = \sigma_m + R = 68,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_\alpha(\alpha_p) = \sigma_m - R = -118,9 \text{ MPa}$$



Estado Plano de Tensão

Máxima tensão cisalhante

Problema: Determinar os planos onde ocorrem as máxima e mínima tensões cisalhantes

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\alpha - 2\sigma_{xy} \sin 2\alpha$$

logo

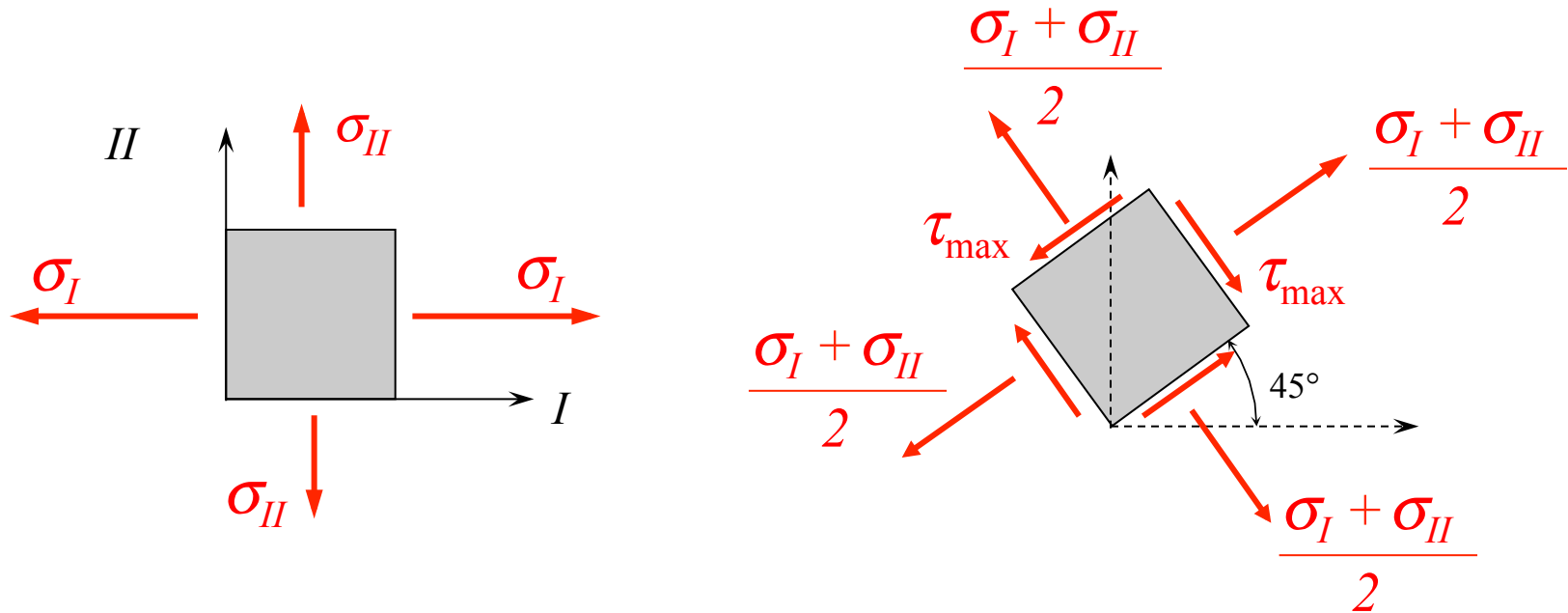
$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_s = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}} = -\cot 2\alpha_p$$

portanto

$$\alpha_s = -\left(\alpha_p + \frac{\pi}{4}\right)$$

Estado Plano de Tensão

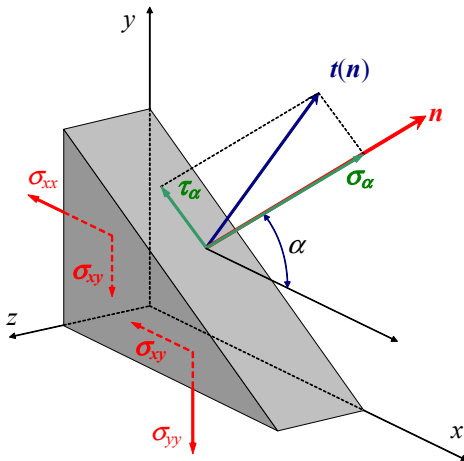
Máxima tensão cisalhante



$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

Estado Plano de Tensão

Impondo-se o equilíbrio de forças nas duas direções obtém-se:

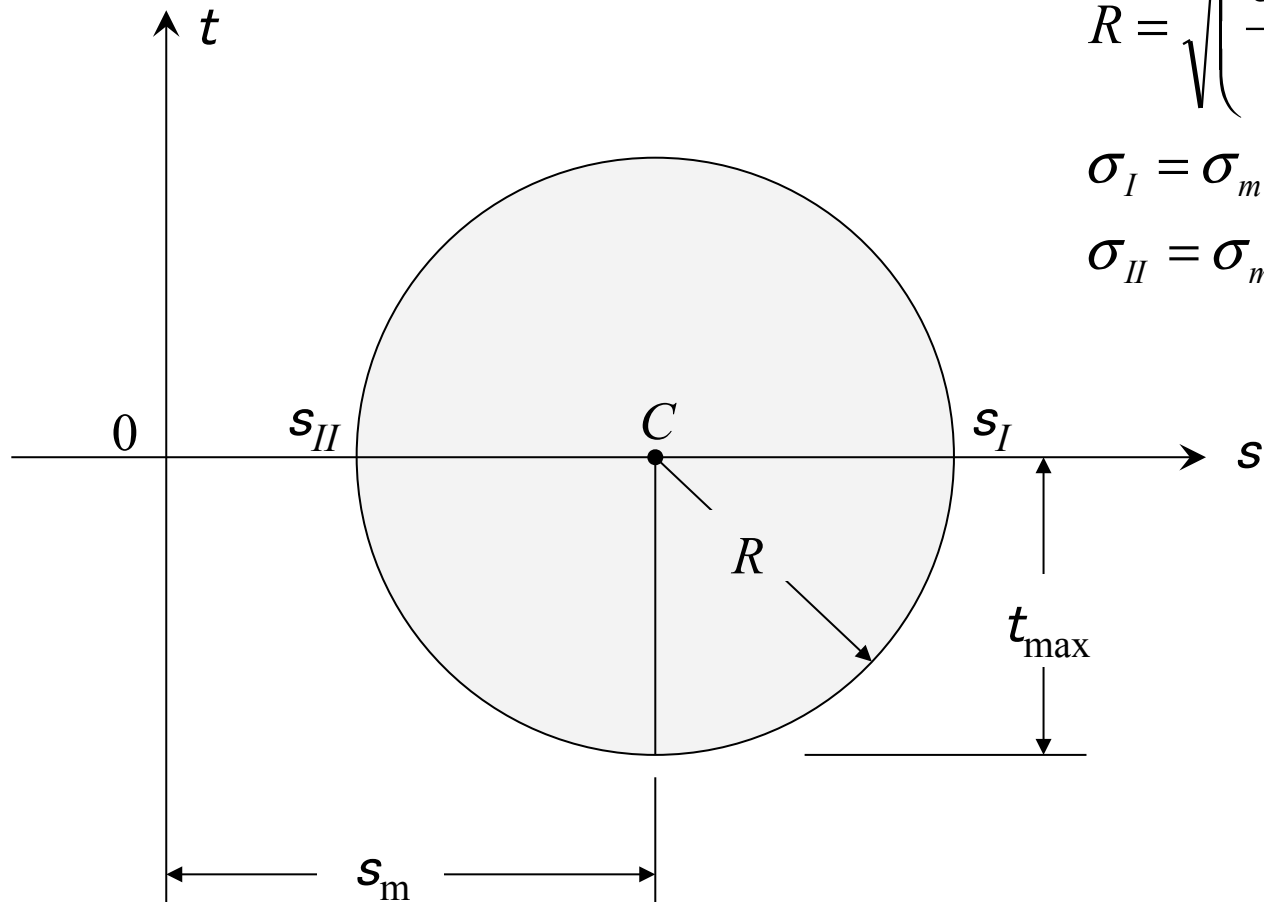


$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha$$

Estado Plano de Tensão

Círculo de Mohr



$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

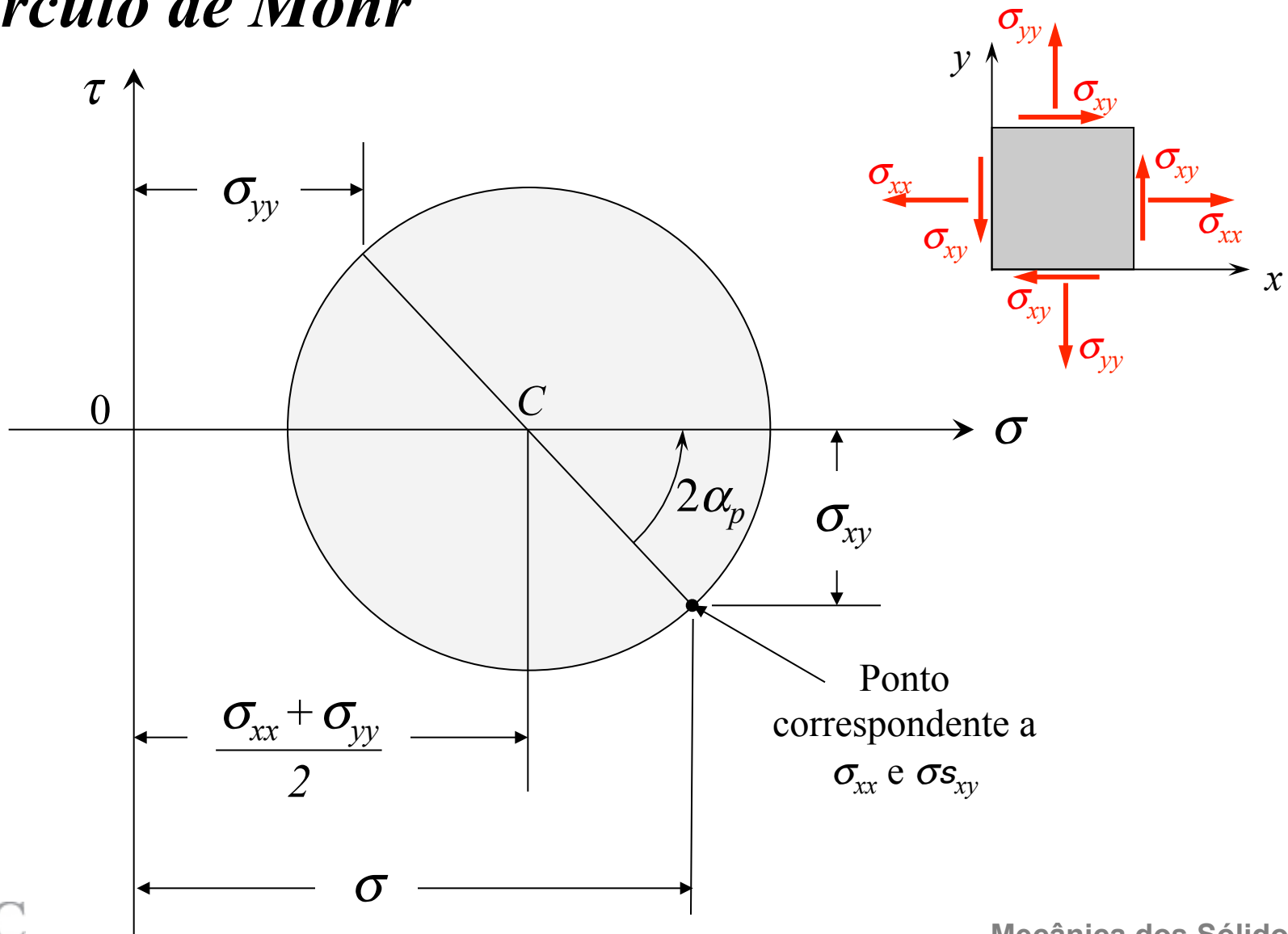
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_I = \sigma_m + R$$

$$\sigma_{II} = \sigma_m - R$$

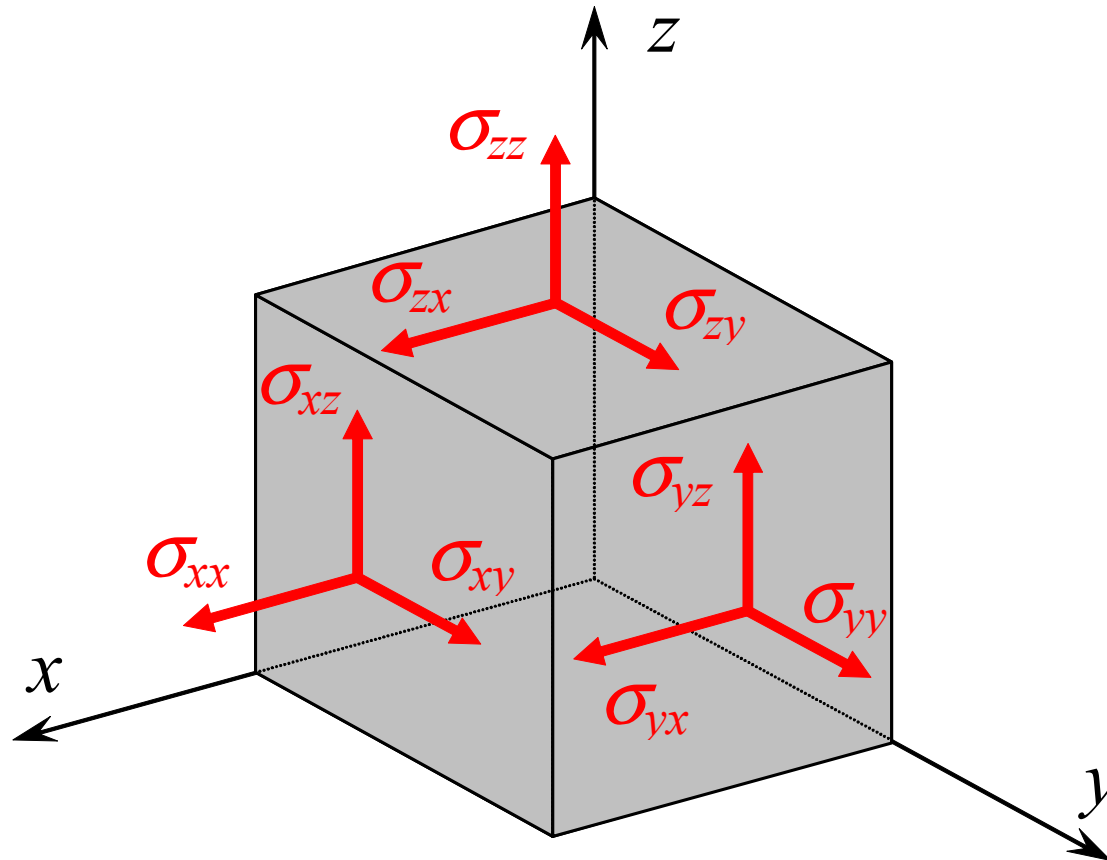
Estado Plano de Tensão

Círculo de Mohr

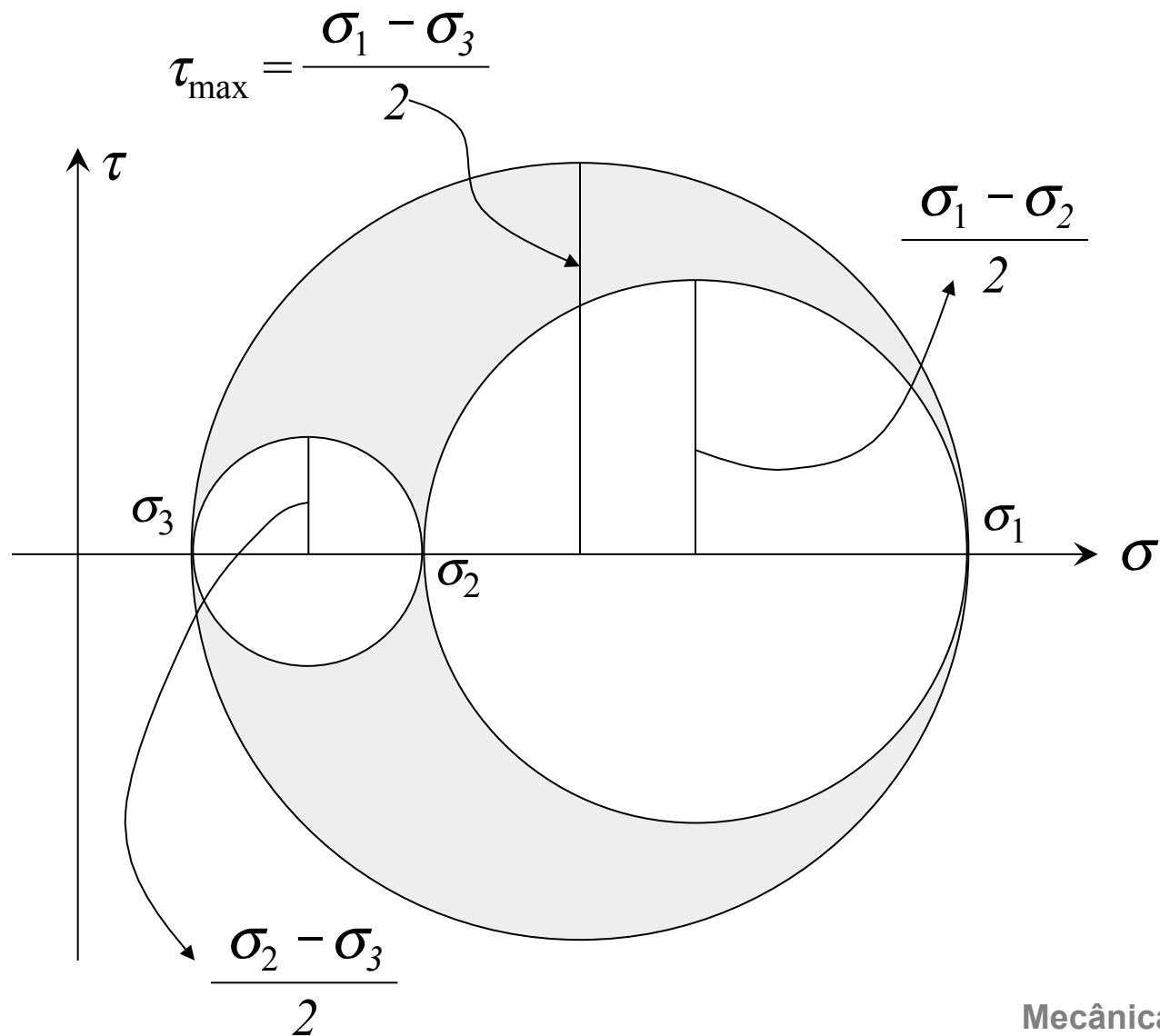


Estado Triaxial de Tensão

Círculo de Mohr



Estado Triaxial de Tensão - *Círculo de Mohr*



Estado Triaxial de Tensão

Círculo de Mohr

