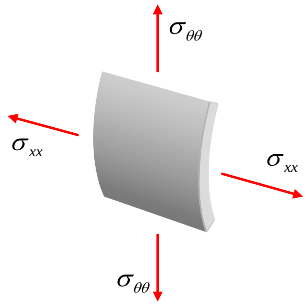
MECÂNICA DOS SÓLIDOS I

P2 – 24/06/2013 - Gabarito

Problema 1 (3,5 pontos)

Estado de Tensão



(i) Tensões devido à pressão interna

$$\sigma_{xx}^{P} = PD/4t$$
$$\sigma_{\theta\theta}^{P} = PD/2t$$

(ii) Tensão devido ao esforço normal

$$\sigma_{xx}^{F} = F/A = F/\pi Dt$$

(iv) Tensões combinadas (estado plano de tensão)

$$\sigma_{xx} = \frac{PD}{4t} + \frac{F}{\pi Dt}$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{PD}{2t}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{x\theta} & \sigma_{xr} \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta r} \\ \sigma_{xr} & \sigma_{\theta r} & \sigma_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PD/4t + F/\pi Dt & 0 & 0 \\ 0 & PD/2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deformações

$$\varepsilon_A = \varepsilon_{xx}$$
$$\varepsilon_B = \varepsilon(-45°) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\theta\theta}}{2}\cos(-90°) + \varepsilon_{x\theta}\sin(-90°) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta}}{2} - \varepsilon_{x\theta}$$
$$\varepsilon_C = \varepsilon(45°) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\theta\theta}}{2}\cos(90°) + \varepsilon_{x\theta}\sin(90°) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta}}{2} + \varepsilon_{x\theta}$$

Portanto:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_A = 119 \times 10^{-6}$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_B + \varepsilon_C - \varepsilon_{xx} = 419 \times 10^{-6}$$
$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{\varepsilon_C - \varepsilon_B}{2} = 0$$

Relações tensão-deformação no estado plano de tensão

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\,\varepsilon_{\theta\theta}) = 53{,}8 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta}) = 99{,}9 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{x\theta} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{x\theta} = 0$$

(a) Esforços

$$P = \frac{2t}{D}\sigma_{\theta\theta} = 9{,}99\ \text{MPa}$$

$$F = \pi D t \sigma_{xx} - \frac{\pi D^2 P}{4} = 1{,}5\ \text{kN}$$

(b) Tensões principais e Fator de Segurança (critério de Tresca: $\tau_{mx} < S_Y/2$)

$$\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} = 99{,}9\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{xx} = 53{,}8\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50{,}0\ \text{MPa}$$

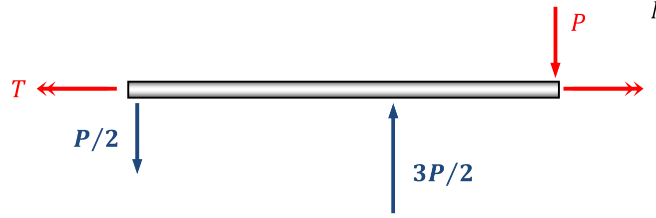
$$F_S = 0{,}25$$

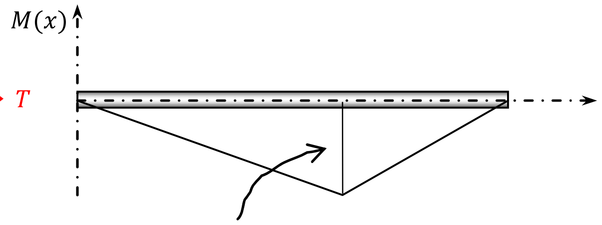
(c) Enquanto a tensão circunferencial, que é positiva e cujo valor não depende da força axial, for maior que a tensão axial, também positiva, a tensão cisalhante máxima continuará igual à calculada no item anterior. Portanto, pelo critério de Tresca, o fator de segurança contra o escoamento também não será alterado. Assim, para que F_S permaneça igual a $0{,}25$, devemos ter:

$$\sigma_{xx} \le \sigma_{\theta\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{\pi D t} + \frac{PD}{4t} \le \frac{PD}{2t} \quad \Rightarrow \quad F \le \frac{\pi D^2 P}{4} = 19{,}6\ \text{kN}$$

Problema 2 (3,0 pontos)

Diagramas de equilíbrio e momento fletor:





A seção mais carregada é aquela na qual o momento fletor é máximo em valor absoluto. Nos pontos das geratrizes superior e inferior do eixo há superposição da tensão normal produzida pela flexão com a cisalhante devido à torsão. Considerando que o limite de escoamento é o mesmo em tração e compressão, podemos considerar qualquer um dos dois pontos da seção para determinar o valor admissível do carregamento. Por exemplo, no ponto da geratriz superior da seção $x = L$:

$$\sigma_{xz} = \frac{D}{2}\frac{T}{J} = \frac{16T}{\pi D^3} = 117\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{D}{2}\frac{(PL/2)}{I} = \frac{16PL}{\pi D^3}$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

Para simplificar o equacionamento, definimos: $\sigma = 16PL/\pi D^3$ (ou $\sigma_{xx} = \sigma$).

Trata-se de um estado plano de tensões, portanto as tensões principais podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (117)^2} \quad \text{(em MPa)}$$

$$\sigma_I = \sigma_m + R = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (117)^2} > 0$$

$$\sigma_{II} = \sigma_m - R = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (117)^2} < 0$$

Portanto, ordenando as tensões principais ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) e aplicando o critério de Tresca:

$$\sigma_1 = \sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (117)^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{II} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (117)^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + (117)^2} < \frac{S_Y}{2} = 125 \text{ MPa}$$

Logo

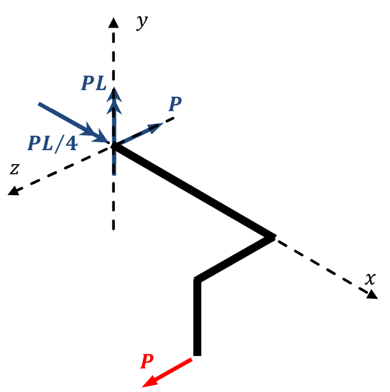
$$\frac{\sigma^2}{4} + (117)^2 < (125)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma < 88 \text{ MPa}$$

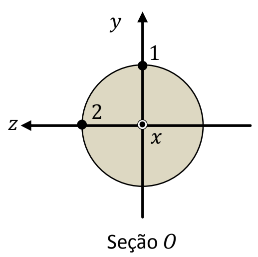
Portanto

$$\frac{16PL}{\pi D^3} < 88 \times 10^6 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad P < 540 \text{ N}$$

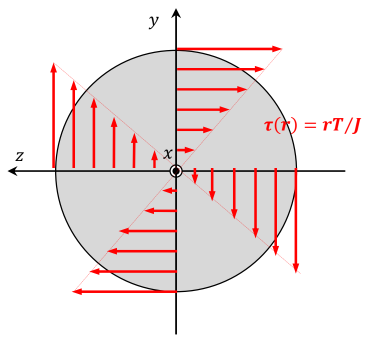
Problema 3 (3,5 pontos)

Diagrama de corpo livre (equilíbrio)





A Seção O está sujeita a um momento torsor negativo $T = -PL/4$ e um momento fletor $M = PL$ que produz flexão no plano xz. A distribuição da tensão cisalhante devido à torção é apresentada na figura abaixo:

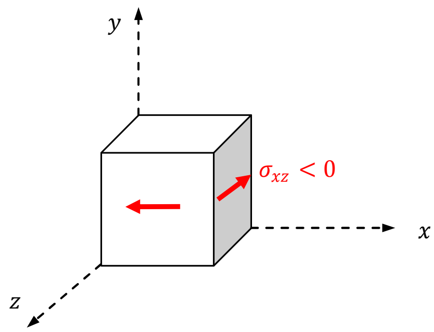


Para a flexão no plano xz, a tensão normal varia linearmente ao longo do eixo z. Para o momento fletor na direção positiva do eixo y, o eixo neutro corresponde ao próprio eixo y e as tensões normais são trativas e compressivas para pontos da seção transversal com cordenadas z negativas e positivas respectivamente.

<u>Ponto 1</u>

O ponto 1 está sobre o eixo y, portanto, desprezando-se o efeito do cisalhamento devido ao esforço cortante[1], nele atua apenas a tensão cisalhante devido à torção. Conforme mostra a figura acima, nesse ponto a tensão cisalhante tem a direção negativa de z. Portanto:

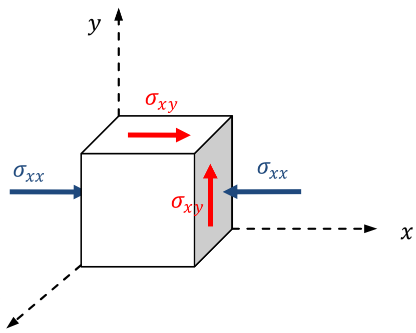
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{4PL}{\pi D^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{4PL}{\pi D^3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



<u>Ponto 2</u>

O ponto 2 está sobre o eixo z e acima do eixo neutro ($z > 0$), portanto, como o momento flertor tem a direção positiva de y, ele encontra-se sob uma tensão normal compressiva. A tensão cisalhante devido à torção tem a direção positiva de y, e portanto é positiva (face orientada na direção positiva de x). Assim:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{32PL}{\pi D^3} & \dfrac{4PL}{\pi D^3} & 0 \\ \dfrac{4PL}{\pi D^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



---

[1] Caso a tensão cisalhante produzida pelo esforço cortante seja considerada ($\sigma_{xz}^{V} = 4V/3A$), teremos: $\sigma_{xz} = \frac{16P}{3\pi D^2} - \frac{4PL}{\pi D^3} = -\frac{4PL}{\pi D^3}\left(1 - \frac{4D}{3L}\right)$. Observe que podemos desprezar o efeito do esforço cortante quando $L \gg D$.