

Problema 1 (3,5 pontos).

(i) Equilíbrio

$$N_1 + N_2 = N$$

$$T_1 + T_2 = T$$

(ii) Deslocamentos e rotações

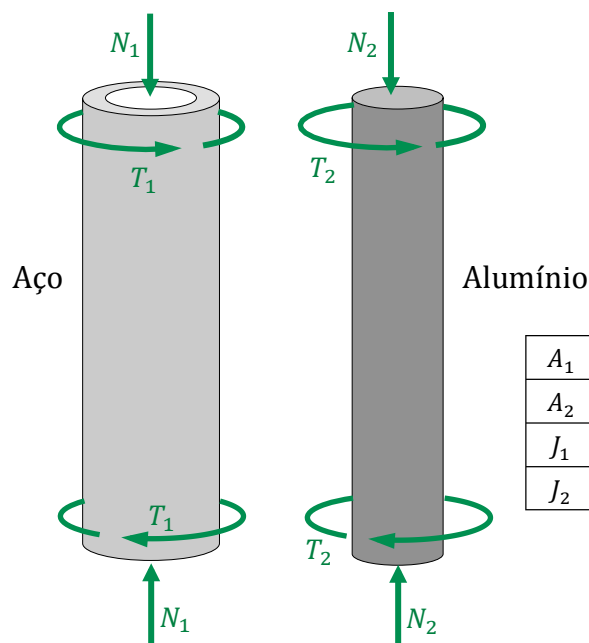
$$\Delta u_i = \frac{N_i L}{E_i A_i} \quad (i = 1, 2)$$

$$\Delta \phi_i = \frac{T_i L}{G_i J_i} \quad (i = 1, 2)$$

(iii) Compatibilidade de deslocamentos

$$\Delta u_1 = \Delta u_2 \Rightarrow N_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} N_1$$

$$\Delta \phi_1 = \Delta \phi_2 \Rightarrow T_2 = \frac{G_2 J_2}{G_1 J_1} T_1$$



A_1	87,2 mm ²
A_2	227 mm ²
J_1	7.508 mm ⁴
J_2	8.200 mm ⁴

Portanto:

$$N_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} N = \frac{(200)(87,2)}{(200)(87,2) + (70)(227)} (5) = 2,62 \text{ kN (compressão)}$$

$$N_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} N = \frac{(70)(227)}{(200)(87,2) + (70)(227)} (5) = 2,38 \text{ kN (compressão)}$$

$$T_1 = \frac{G_1 J_1}{G_1 J_1 + G_2 J_2} T = \frac{(75)(7.508)}{(75)(7.508) + (26)(8.200)} (100) = 72,5 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

$$T_2 = \frac{G_2 J_2}{G_1 J_1 + G_2 J_2} T = \frac{(26)(8.200)}{(75)(7.508) + (26)(8.200)} (100) = 27,5 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

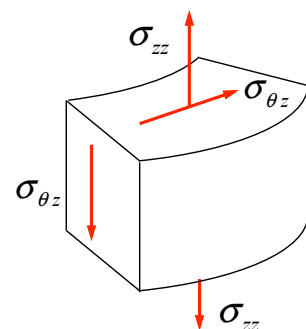
Estados de tensão (Tensores de Tensão):

(a) Eixo de Alumínio – Raio Externo¹

$$\sigma_{zz} = -\frac{N_2}{A_2} = -\frac{2.380}{227} = -10,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{D_I T_2}{2 J_2} = \frac{17}{2} \left(\frac{27.500}{8.200} \right) = 28,5 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28,5 \\ 0 & 28,5 & -10,5 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



(b) Tubo (Jaqueta) de Aço – Raio Interno

$$\sigma_{zz} = -\frac{N_1}{A_1} = -\frac{2.620}{87,2} = -30,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{D_I T_1}{2 J_1} = \frac{17}{2} \left(\frac{72.500}{7.508} \right) = 82,1 \text{ MPa}$$

¹ Nas equações, o torque tem unidade de N · mm.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 82,1 \\ 0 & 82,1 & -30,0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(c) Tubo (Jaqueta) de Aço – Raio Externo

$$\sigma_{zz} = -\frac{N_1}{A_1} = -\frac{2.620}{87,2} = -30,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{D_E T_1}{2 J_1} = \frac{20}{2} \left(\frac{72.500}{7.508} \right) = 96,6 \text{ MPa}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96,6 \\ 0 & 96,6 & -30,0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Problema 2 (3,5 pontos).

(a) Antes do contato, toda a carga é transferida para o Eixo 1. Logo, o contato ocorre quando:

$$\delta = \frac{P_\delta L}{E_1 A_1}$$

Portanto:

$$P_\delta = \frac{E_1 A_1}{L} \delta$$

(b) Após o contato, o incremento da carga $\Delta P = P - P_\delta$ é transferido tanto para o Eixo 1 quanto para o Tubo 2. O incremento no deslocamento vertical do batente é $\Delta u = u - \delta$, onde u é o deslocamento total. Portanto, o equilíbrio fica:

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 = \Delta P$$

onde ΔN_1 e ΔN_2 correspondem aos incrementos de força transmitidos para o eixo e o tubo.

Os incrementos nos deslocamentos no eixo e no tubo são dados por (considerando-se $L + \delta \approx L$):

$$\Delta u_1 = \frac{\Delta N_1 L}{E_1 A_1}, \text{ e } \Delta u_2 = \frac{\Delta N_2 L}{E_2 A_2}$$

Estes incrementos são idênticos, logo:

$$\Delta u = \Delta u_1 = \Delta u_2 \Rightarrow \frac{\Delta N_1}{E_1 A_1} = \frac{\Delta N_2}{E_2 A_2}$$

Portanto:

$$\Delta N_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \Delta P$$

e

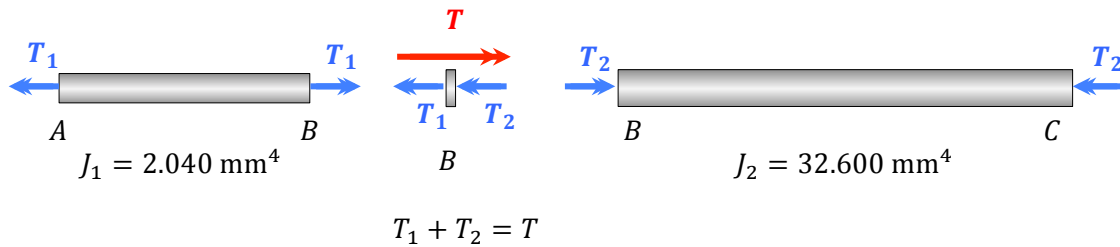
$$\Delta u = \frac{L}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \Delta P$$

Como $\Delta P = 2P_\delta - P_\delta = P_\delta = E_1 A_1 \delta / L$,

$$\Delta u = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \delta \quad \text{e} \quad u = \delta + \Delta u = \left(1 + \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \right) \delta$$

Problema 3 (3,0 pontos).

(i) Equilíbrio:



(ii) Rotações

$$\phi_B - \phi_A = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} = \frac{T_1}{K_1}, \quad K_1 = \frac{G_1 J_1}{L_1} = 509 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$\phi_C - \phi_B = -\frac{T_2 L_2}{G_2 J_2} = -\frac{T_2}{K_2}, \quad K_2 = \frac{G_2 J_2}{L_2} = 4.890 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

(iii) Condições de contorno

$$\phi_A = \phi_C = 0$$

Logo:

$$\frac{T_1}{K_1} = \frac{T_2}{K_2}$$

e portanto

$$T_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} T = \frac{509}{509 + 4.890} T = 0,0943 T$$

$$T_2 = \frac{K_2}{K_1 + K_2} T = \frac{4.890}{509 + 4.890} T = 0,906 T$$

onde o torque está em N · m.

A máxima tensão cisalhante produzida no Segmento 1 é (observe que 1 MPa = 1 N/mm²):

$$\max \left\{ \sigma_{\theta z}^{(1)}(r) \right\} = \frac{D_1 T_1}{2 J_1} < \tau_Y \Rightarrow T_1 < \frac{2 J_1 \tau_Y}{D_1} = \frac{(2)(2.040)(70)}{(12)} = 23.800 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

e portanto:

$$0,0943 T < 23,8 \text{ N} \cdot \text{m} \Rightarrow T < 252 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Repetindo a análise para o Segmento 2:

$$\max \left\{ \sigma_{\theta z}^{(2)}(r) \right\} = \frac{D_2 T_2}{2 J_2} < \tau_Y \Rightarrow T_2 < \frac{2 J_2 \tau_Y}{D_2} = \frac{(2)(32.600)(70)}{(24)} = 190.000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

e portanto:

$$0,906 T < 190 \text{ N} \cdot \text{m} \Rightarrow T < 210 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O máximo torque admissível é portanto o menor valor entre os dois:

$$T_{\max} = 210 \text{ N} \cdot \text{m}.$$