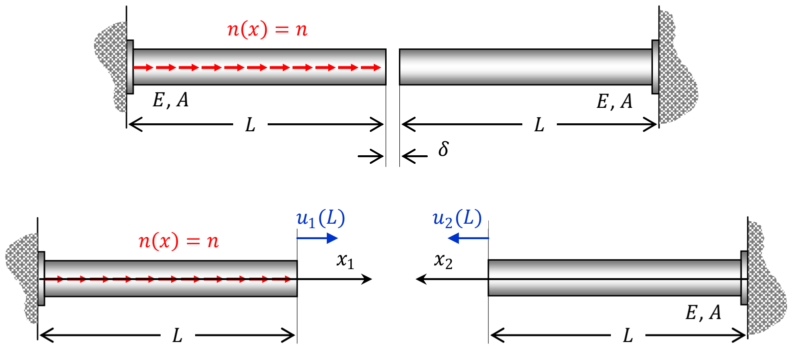
Problema 1 (2,5 pontos)



<u>Barra (1)</u>

$$\frac{dN_1}{dx_1} + n = 0 \Rightarrow N_1(x_1) = -nx_1 + c_1$$

$$\frac{du_1}{dx_1} = \frac{N_1(x_1)}{EA} \Rightarrow u_1(x_1) = -\frac{nx_1^2}{2EA} + \frac{c_1x_1}{EA} + d_1$$

$$u_1(0) = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

$$N_1(x_1) = -nx_1 + c_1$$

$$u_1(x_1) = \frac{x_1(2c_1 - nx_1)}{2EA}$$

<u>Barra (2)</u>

$$\frac{dN_2}{dx_2} = 0 \Rightarrow N_2(x_2) = c_2$$

$$\frac{du_2}{dx_2} = \frac{N_2(x_2)}{EA} \Rightarrow u_2(x_2) = \frac{c_2x_2}{EA} + d_2$$

$$u_2(0) = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

$$N_2(x_2) = c_2$$

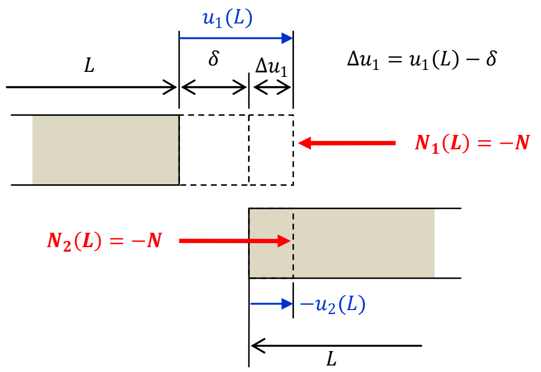
$$u_2(x_2) = \frac{c_2x_2}{EA}$$

(a) Imediatamente antes das barras entrarem em contato: $n = n_C$, $u_1(L) = \delta$, e $N_1(L) = N_2(L) = 0$

$$N_1(L) = -n_CL + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = n_CL$$

$$u_1(L) = \frac{L(2n_CL - n_CL)}{2EA} = \delta \Rightarrow \boxed{n_C = \frac{2EA\delta}{L^2}}$$

(b) Após as barras entrarem em contato, para cada incremento Δn na força distribuída, o acréscimo no deslocamento da extremidade da barra da esquerda será $\Delta u_1 = u_1(L) - \delta$. Como as duas barras estão em contato, devemos ter $\Delta u_1 = -u_2(L)$. A força de contato (compressiva) entre as barras é N.



<u>Barra (1)</u>

$$N_1(x_1) = -\Delta n\, x_1 + c_1$$

$$\Delta u_1(x_1) = \frac{x_1(2c_1 - \Delta n\, x_1)}{2EA}$$

<u>Barra (2)</u>

$$N_2(x_2) = c_2$$

$$u_2(x_2) = \frac{c_2x_2}{EA}$$

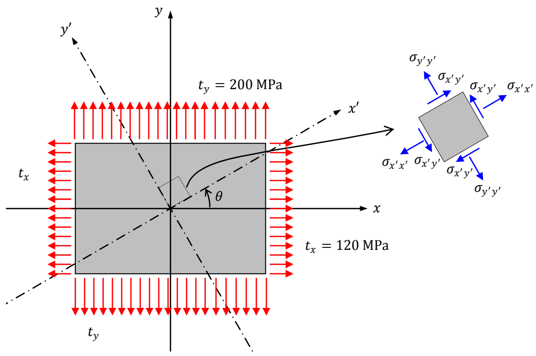
$N_1(L) = -\Delta n\, L + c_1 = -N \;\Rightarrow\; c_1 = \Delta n\, L - N \qquad\qquad N_2(L) = c_2 = -N$

$\Delta u_1(L) = \dfrac{\Delta n\, L^2}{2EA} - \dfrac{NL}{EA} \qquad\qquad u_2(L) = -\dfrac{NL}{EA}$

$$\Delta u_1(L) = -u_2(L) \;\Rightarrow\; \frac{\Delta n\, L^2}{2EA} - \frac{NL}{EA} = \frac{NL}{EA} \;\Rightarrow\; N = \frac{\Delta n\, L}{4}$$

Para $n = 2n_C$, $\Delta n = n - n_C = n_C = 2EA\delta/L^2$. Portanto a força de contato será:

$$\boxed{N = \frac{EA\delta}{2L}}$$



Problema 2 (2,5 pontos)

$\sigma_{xx} = t_x = 120\text{ MPa}$

$\sigma_{yy} = t_y = 200\text{ MPa}$

$\sigma_{xy} = 0$

$$\sigma_{x'x'} = \sigma(30°) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 60° + \sigma_{xy}\sin 60° = 140\text{ MPa}$$
$$\sigma_{y'y'} = \sigma(120°) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 240° + \sigma_{xy}\sin 240° = 180\text{ MPa}$$
$$\sigma_{x'y'} = \tau(30°) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\sin 60° + \sigma_{xy}\cos 60° = 34{,}6\text{ MPa}$$

As direções x, y e z coincidem com as direções principais, portanto, ordenando-se $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$:

$\sigma_1 = \sigma_{yy} = 200\text{ MPa}$

$\sigma_2 = \sigma_{xx} = 120\text{ MPa}$

$\sigma_3 = \sigma_{zz} = 0$

Logo

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 100\text{ MPa}$$

Problema 3 (2,5 pontos)

No plano xy:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = 130\text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = 76{,}2\text{ MPa}$$

$\sigma_I = \sigma_m + R = 206\text{ MPa}$

$\sigma_{II} = \sigma_m - R = 53{,}8\text{ MPa}$

Portanto, ordenando-se $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, as tensões principais são:

$\sigma_1 = \sigma_I = 206\text{ MPa}$

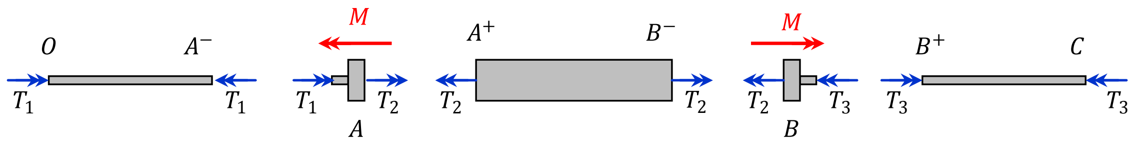
$\sigma_2 = \sigma_{II} = 53{,}8\text{ MPa}$

$\sigma_3 = \sigma_{zz} = -50 \text{ MPa}$

Logo

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 128 \text{ MPa}$$

Problema 4 (2,5 pontos)



$J_1 = \pi D^4/32$

$J_2 = \pi D^4/2$

$K_1 = GJ_1/L$

$K_2 = GJ_2/2\,L$

Considerando-se a simetria: $T_1 = T_3$

Equilíbrio em A ou B: $T_1 + T_2 = M$

Rotações:

$$\phi_{A^-} - \phi_O = -\frac{T_1}{K_1}$$

$$\phi_{B^-} - \phi_{A^+} = \frac{T_2}{K_2}$$

$$\phi_C - \phi_{B^+} = -\frac{T_1}{K_1}$$

Onde $K_1 = \pi G D^4/32L$ e $K_2 = \pi G D^4/4L$

Compatibilidade geométrica: $\phi_O = 0$, $\phi_C = 0$, $\phi_{A^-} = \phi_{A^+} = \phi_A$ e $\phi_{B^-} = \phi_{B^+} = \phi_B$

Logo

$$\phi_A = -\frac{T_1}{K_1}$$

$$\phi_B = \frac{T_1}{K_1}$$

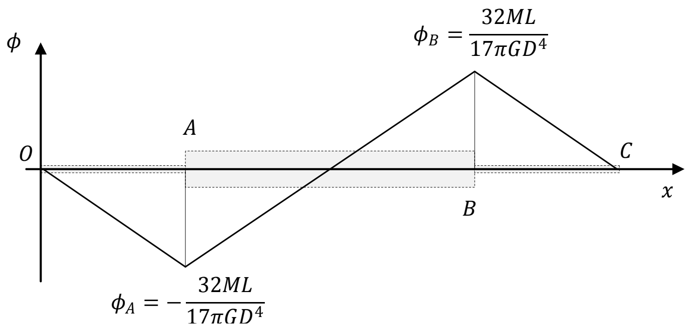
$$\phi_B - \phi_A = \frac{T_2}{K_2} \quad \Rightarrow \quad 2\frac{T_1}{K_1} = \frac{T_2}{K_2}$$

E portanto: $T_1 = T_2/16$

Substituindo-se esse resultado na equação de equilíbrio obtemos:

$$T_1 = \frac{M}{17} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{16M}{17}$$

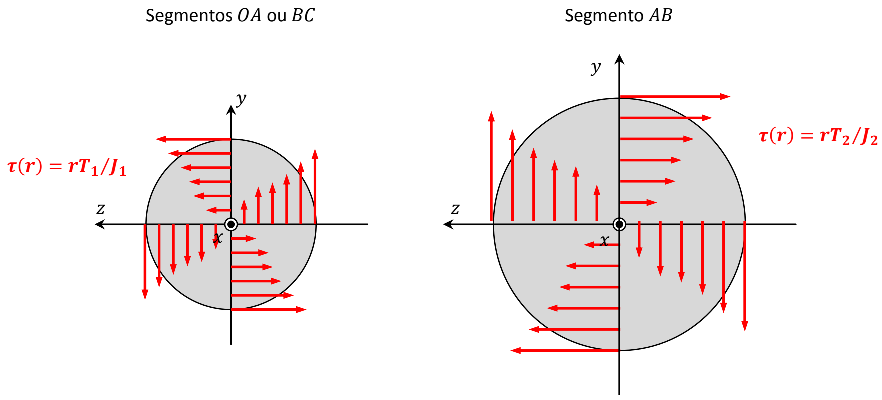
(a) O gráfico abaixo apresenta a distribuição da rotação (torção) ao longo do eixo



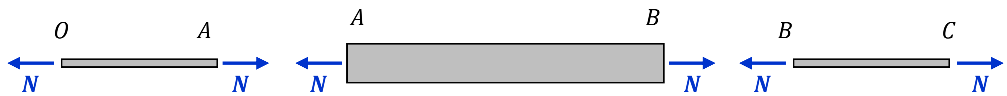
A máxima rotação, em valor absoluto, ocorre nas seções A e B. Observe que como o carregamento é antissimétrico, a rotação é nula no centro do eixo.

(b) Nos segmentos OA ou BC, a maior tensão cisalhante devido à torção ocorre na superfície do eixo ($r = D/2$), e seu valor absoluto é $\tau(D/2) = T_1 D/2J_1 = 16M/17\pi D^3$.

No segmento AB, a maior tensão cisalhante devido a torção também ocorre em sua superfície ($r = 2D/2$), e seu valor absoluto é $\tau(2D/2) = T_2 D/J_2 = 32M/17\pi D^3$.



(c) Tensões normais devido à variação de temperatura ΔT



$$\frac{u_A - u_O}{L} = \frac{N}{EA_1} + \alpha\Delta T$$

$$\frac{u_B - u_A}{2L} = \frac{N}{EA_2} + \alpha\Delta T$$

$$\frac{u_C - u_B}{L} = \frac{N}{EA_1} + \alpha\Delta T$$

$$u_O = u_C = 0 \;\; \Rightarrow \;\; u_A = -u_B = \frac{N}{EA_1} + \alpha\Delta T$$

Portanto, combinando-se a segunda com a quarta equação da lista acima, obtém-se

$$-\frac{N}{EA_1} - \alpha\Delta T = \frac{N}{EA_2} + \alpha\Delta T$$

$A_1 = \pi D^2/4$ e $A_2 = \pi(2D)^2/4 = \pi D^2$, logo:

$$N = -\frac{2\pi\alpha E D^2}{5}\Delta T$$

A tensão normal nos segmentos OA e BC é portanto:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A_1} = -\frac{8}{5}\alpha E\Delta T$$

No segmento AB, a tensão normal é:

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A_2} = -\frac{2}{5}\alpha E\Delta T$$